

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID**

**ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR**



**Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de  
Telecomunicación**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**ECUACIÓN PARABÓLICA APLICADA A LA  
PROPAGACIÓN ELECTROMAGNÉTICA**

**Javier Gallego Díaz**  
**Tutor: José María Berdoy Contreras**  
**Ponente: José Luis Masa Campos**

**JUNIO 2016**



# **ECUACIÓN PARABÓLICA APLICADA A LA PROPAGACIÓN ELECTROMAGNÉTICA**

**AUTOR: Javier Gallego Díaz**  
**TUTOR: José María Berdoy Contreras**

**Dpto. de Tecnologías Electrónicas y de Comunicaciones**  
**Escuela Politécnica Superior**  
**Universidad Autónoma de Madrid**  
**Junio de 2016**



## Resumen (castellano)

Este Trabajo Fin de Grado consiste en la búsqueda e implementación de diferentes métodos que puedan determinar los efectos multipath que sufren las señales de radar e ILS en aeropuertos ante la presencia de obstáculos.

En la búsqueda de posibles métodos que pudieran resolver el problema plantado, se determinó que la forma más eficiente de determinar los efectos multipath era mediante el desarrollo de algoritmos que resolvieran la ecuación parabólica aplicada a la propagación electromagnética. La importancia de la resolución de la ecuación parabólica aplicada a la propagación electromagnética reside en su eficiencia computacional y en que únicamente es necesario conocer la fuente que radia la señales para poder determinar el campo en cualquier ubicación del escenario donde se trabaje.

Para este trabajo, se partirá de un enfoque en el que se obviará una de las dimensiones de la ecuación parabólica con el fin de simplificar la complejidad de los cálculos necesarios para la resolución de la misma.

Una vez vistas las limitaciones del enfoque anterior, se dispondrá un nuevo algoritmo que tenga en cuenta las tres dimensiones en la resolución de la ecuación parabólica consiguiéndose resultados más satisfactorios y resolviendo los problemas surgidos anteriormente.

Durante la realización del proyecto se hará uso de los algoritmos desarrollados para determinar los efectos multipath que puedan darse en diferentes escenarios para asegurar la versatilidad de los algoritmos ante distintos tipo de obstáculos.

Finalmente, se verificarán los resultados con diferentes modelos y fuentes científicas de forma que queden probados todos los algoritmos implementados.

## Palabras clave (castellano)

2D, 3D, método de la ecuación parabólica, propagación electromagnética ,ILS, radar, multipath.

## **Abstract (English)**

This Bachelor Thesis is based on the search and implementation of different methods that can determine the multipath effects suffered by radar and ILS signals on airports in the presence of obstacles.

During the search for possible methods that could solve the problem planted, it was determined that the most efficient way to determine the multipath effects was by developing algorithms that solve the parabolic equation applied to the electromagnetic propagation. The importance of solving the parabolic equation applied to the electromagnetic propagation is based on its computational efficiency and the only need to know the source radiating the signals to determine the field at any location on the scenario where the problem is planted.

This work will start with an approach where one of the dimensions of the parabolic equation is obviated in order to simplify the complexity of the calculations required for the resolution of the equation.

Once seen the limitations of the above approach, a new algorithm is developed taking into account the three dimensions in order to solve the parabolic equation. The results achieved were satisfactory and it solved many of the problems encountered in the previous algorithms.

During this thesis, the algorithms developed will be used to determine the multipath effects that may occur in different scenarios to ensure the versatility of the algorithms for different kinds of obstacles.

Finally, the results will be verified with different models and scientific sources so that all the algorithms developed can be tested.

## **Keywords (inglés)**

2D, 3D, parabolic equation method, electromagnetic propagation ,ILS, radar, multipath.



## INDICE DE CONTENIDOS

1 Introducción.....	1
1.1 Motivación.....	1
1.2 Objetivos.....	1
1.3 Organización de la memoria.....	1
2 Estado del arte .....	2
2.1 Método de la ecuación parabólica .....	3
3 Propagación en dos dimensiones .....	7
3.1 Métodos numéricos .....	7
3.1.1 Transformada de Fourier .....	7
3.1.2 Método de diferencias finitas .....	8
3.2 Métodos de truncamiento .....	11
3.2.1 Ventana de Hanning .....	11
3.2.2 Capa de absorción.....	11
3.3 Modelado de la fuente .....	14
3.4 Elección de los parámetros .....	16
3.5 Verificación de los resultados .....	17
3.5.1 Terreno plano.....	17
3.5.2 Terreno irregular.....	18
3.6 Resultados.....	19
3.6.1 Terreno plano.....	19
3.6.2 Terreno irregular.....	20
4 Propagación en tres dimensiones.....	23
4.1 Métodos numéricos .....	23
4.2 Métodos de truncamiento .....	25
4.3 Modelado de la fuente .....	27
4.4 Elección de los parámetros .....	30
4.5 Verificación de los resultados .....	31
4.5.1 Modelo de dos rayos.....	31
4.6 Resultados.....	32
4.6.1 Terreno plano.....	32
4.6.2 Terreno irregular I .....	34
4.6.1 Terreno irregular II .....	36
5 Conclusiones y trabajo futuro.....	38
5.1 Conclusiones.....	38
5.2 Trabajo futuro .....	38
Referencias .....	41
Glosario .....	42
Anexos.....	- 1 -
A.1 Transformada seno de Fourier .....	- 1 -



# INDICE DE FIGURAS

FIGURA 2-1: ILUSTRACIÓN MÉTODO ECUACIÓN PARABÓLICA 2D .....	5
FIGURA 3-1: REPRESENTACIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO USANDO VENTANA DE HANNING .....	12
FIGURA 3-2: REPRESENTACIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO USANDO CAPA DE ABSORCIÓN .....	13
FIGURA 3-3: ERROR EN FUNCIÓN DEL ÁNGULO DE PROPAGACIÓN .....	15
FIGURA 3-4: EJEMPLO DEL LÓBULO SIMULADO .....	15
FIGURA 3-5: ILUSTRACIÓN MODELO DE TIERRA PLANA .....	17
FIGURA 3-6: EJEMPLO DIFERENCIA ENTRE MODELO ANALÍTICO Y SIMULADO .....	18
FIGURA 3-7: CAMPO SIMULADO MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS .....	19
FIGURA 3-8: CAMPO SIMULADO MEDIANTE SPLIT-STEP FOURIER.....	19
FIGURA 3-9: TERRENO PLANO-COMPARACIÓN MODELO ANALÍTICO Y ALGORITMOS SIMULADOS .	20
FIGURA 3-10: MODELO TERRENO IRREGULAR .....	21
FIGURA 3-11: TERRENO IRREGULAR-CAMPO SIMULADO MEDIANTE SPLIT-STEP FOURIER .....	21
FIGURA 3-12: TERRENO IRREGULAR-ATENUACIÓN CAMPO SIMULADO VS ATENUACIÓN CAMPO [3] .....	22
FIGURA 4-1: EJEMPLO VENTANA DE HANNING TRIDIMENSIONAL .....	25
FIGURA 4-2: DIAGRAMA ALGORITMO IMPLEMENTADO .....	26
FIGURA 4-3: ILUSTRACIÓN MODELO DE DOS RAYOS .....	31
FIGURA 4-4: TERRENO PLANO- FACTOR DE PROPAGACIÓN SIMULADO VS FACTOR DE PROPAGACIÓN [4] .....	32
FIGURA 4-5: TERRENO PLANO-FACTOR DE PROPAGACIÓN EN FUNCIÓN DE X .....	33
FIGURA 4-6: MODELO TERRENO IRREGULAR I.....	34
FIGURA 4-7: TERRENO IRREGULAR I- CAMPO SIMULADO A 1 GHZ .....	35
FIGURA 4-8: TERRENO IRREGULAR I- CAMPO SIMULADO A 100 MHZ.....	35
FIGURA 4-9: MODELO TERRENO IRREGULAR II.....	36
FIGURA 4-10: TERRENO IRREGULAR II-CAMPO SIMULADO .....	37
FIGURA 4-11: TERRENO IRREGULAR II- CAMPO EN [6].....	37

# 1 Introducción

---

## 1.1 Motivación

Esta memoria de TFG nace ante la necesidad de INECO, empresa donde realice practicas extracurriculares, de incorporar a las herramientas de las que disponen para la realización de estudios de áreas críticas y sensibles en aeropuertos, una nueva línea de investigación para poder determinar los efectos multipath en diferentes escenarios desde un punto de vista computacional eficiente.

Como respuesta a la necesidad mencionada anteriormente, se han desarrollado una serie de algoritmos dirigidos a resolver la ecuación parabólica aplicada a la propagación electromagnética.

## 1.2 Objetivos

- Investigación de diferentes métodos de resolución de la ecuación parabólica aplicada a la propagación electromagnética.
- Desarrollo de diferentes aproximaciones que permitan la resolución de la ecuación parabólica en la propagación tanto en dos como en tres dimensiones.
- Implementación de algoritmos que puedan dar una respuesta satisfactoria ante diferentes escenarios.

## 1.3 Organización de la memoria

La memoria consta de los siguientes capítulos:

- En el capítulo 2 se introduce el estado del arte, donde se dan a conocer los principios básicos de la ecuación parabólica y su derivación.
- El capítulo 3 trata la ecuación parabólica aplicada a la propagación en dos dimensiones, desarrollando dos algoritmos para su resolución y mostrando los resultados de su implementación.
- El capítulo 4 trata la ecuación parabólica ecuación parabólica aplicada a la propagación en tres dimensiones, desarrollando un algoritmo que de respuesta a las deficiencias mostradas por los algoritmos desarrollados anteriormente.
- El capítulo 5 recoge las conclusiones del TFG y abre futuras líneas de trabajo en el desarrollo de algoritmos que mejoren los resultados obtenidos.

## 2 Estado del arte

---

Como se ha mencionado en la sección 1.1, el desarrollo de este TFG va dirigido a aplicaciones de estudio de áreas críticas y sensibles en aeropuertos. En este tipo de estudios, es muy común que se tenga que determinar el efecto que supondría para la señal de un radar o ILS (frecuencias entre 100 MHz – 1 GHz) la aparición de un obstáculo en su línea de vista (LOS).

Para determinar este efecto, a lo largo de los años se han distinguido principalmente dos puntos de vista:

- Método de la ecuación integral.
- Método de la ecuación parabólica.

Para este TFG, el método de la ecuación integral ha sido descartado debido a que al ser implementado no se tomaban en cuenta muchas de las reflexiones que se podían dar en el escenario donde se trabajará. Como consecuencia los resultados que se obtenían eran poco precisos .

En cuanto al método de la ecuación parabólica, permite obtener resultados considerablemente precisos con una carga computacional relativamente baja. Además, su implementación permite conocer el valor del campo electromagnético en cualquier punto de una superficie únicamente conociendo el campo electromagnético inicial.

Estos son los motivos por los que se ha decidido que el desarrollo de los algoritmos capaces de determinar los efectos de diferentes obstáculos en la línea de vista del equipo correspondiente, ya sea radar o ILS, se basen en el método de la ecuación parabólica. A continuación, se detallan los principios básicos de este método y su derivación.

## 2.1 Método de la ecuación parabólica

La ecuación parabólica aplicada a la propagación electromagnética se deriva de la ecuación de Helmholtz cuyo origen viene de las ecuaciones de Maxwell, ecuación (2.1)

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

$\vec{E} = \vec{E}(x,y,z;t)$ : Campo Eléctrico en V/m  
 $\vec{H} = \vec{H}(x,y,z;t)$ : Campo Magnético en A/m  
 $\vec{J}$ : Densidad de corriente en A/m<sup>2</sup>  
 $\rho$ : Densidad de carga eléctrica en C/m<sup>3</sup>  
 $\epsilon$ : Permitividad eléctrica en F/m  
 $\mu$ : Permeabilidad magnética en H/m

Las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia para un medio sin fuentes, lineal, isótropo y homogéneo se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}\tag{2.2.1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega\epsilon\vec{E}\tag{2.2.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}\tag{2.2.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0\tag{2.2.4}$$

Aplicando el rotacional a ambos lados de la ecuación (2.2.1) y haciendo uso de la ecuación (2.2.2) se obtiene la ecuación (2.3).

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = j\omega\mu\nabla \times \vec{H} = \omega^2\mu\epsilon\vec{E}\tag{2.3}$$

Esta ecuación puede simplificarse mediante el uso de la identidad (2.4) obteniéndose la ecuación (2.5) conocida como ecuación de onda o ecuación de Helmholtz.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}\tag{2.4}$$

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega\mu\epsilon\vec{E} = 0\tag{2.5}$$

Una ecuación idéntica para  $\vec{H}$  puede derivarse de la misma forma obteniendo la ecuación (2.6).

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega \mu \epsilon \vec{H} = 0 = 0 \quad (2.6)$$

Haciendo uso de la relación (2.7), la ecuación (2.5) se puede expresar como la ecuación (2.8)

$$\vec{E}(x, y, z; t) = \vec{E}_o(x, y, z) e^{j\omega t} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= \omega \mu \epsilon \vec{E} \\ \Leftrightarrow e^{j\omega t} \nabla^2 \vec{E}_o &= -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}_o e^{j\omega t} \\ \Rightarrow \nabla^2 \vec{E}_o &= -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}_o \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_o}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_o}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E}_o &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Quedando para el caso de propagación en 2D como muestra la ecuación (2.9).

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_o}{\partial y^2} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E}_o = 0 \quad (2.9)$$

Aplicando las propiedades que se muestran a continuación al término  $\omega^2 \epsilon \mu$ , se llega a la ecuación (2.10) conocida como ecuación de onda escalar.

Velocidad de la luz en el vacío:  $\frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}}$

Constante de propagación:  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Velocidad de la luz en un determinado medio:  $v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$

En caso de propagación en el vacío:  $\mu_r = \epsilon_r = 1$

Índice de refracción:  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$

$$\omega^2 \epsilon \mu = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} n^2 = k_o^2 n^2$$

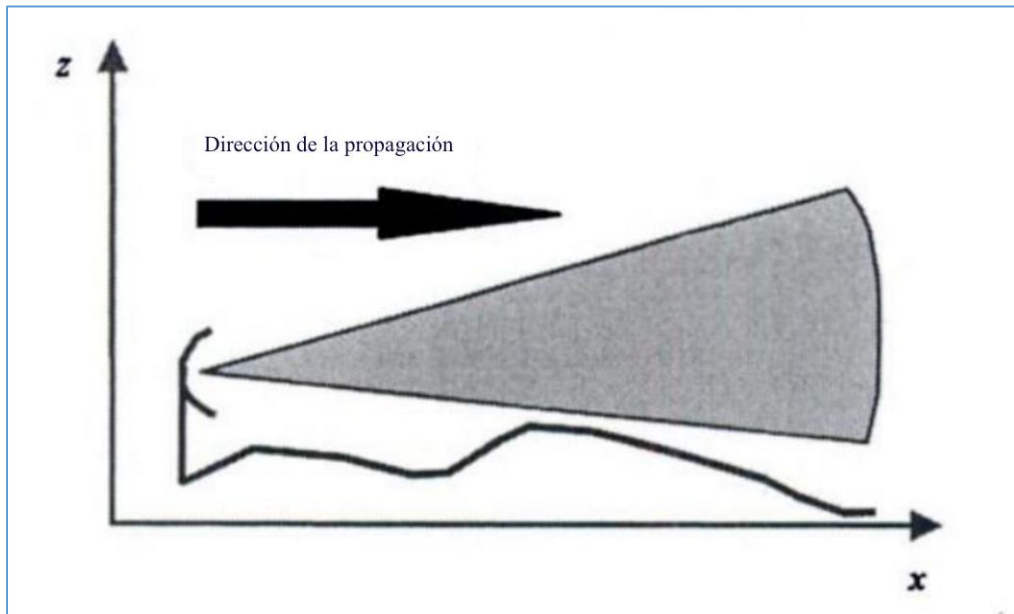
$$\frac{\partial^2 \vec{E}_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_o}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_o}{\partial z^2} + k^2 n^2 \vec{E}_o = 0 \quad (2.10)$$

La ecuación de onda escalar se representa formalmente en la ecuación (2.11). En caso de que la polarización del campo sea lineal, caso utilizado durante el presente trabajo, el campo eléctrico tendrá una sola componente siendo  $\psi(x,y,z) = H_z$  en caso de polarización horizontal o  $\psi(x,y,z) = E_z$  en caso de polarización vertical.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 n^2 \psi = 0 \quad (2.11)$$

En la ecuación anterior, la propagación se da a lo largo del eje  $x$ , siendo el eje  $y$  y el eje  $z$  la dirección transversal y la altura respectivamente. Para el caso de propagación en dos dimensiones, no hay variaciones en la dirección transversal por lo que la ecuación de onda escalar queda como muestra la ecuación (2.12).

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 n^2 \psi = 0 \quad (2.12)$$



**Figura 2-1: Ilustración Método Ecuación Parabólica 2D**

Con el objetivo de que el campo inicial se propague desde una ubicación  $x$  hasta una nueva ubicación  $x + \Delta x$ , son introducidas las funciones reducidas (2.13) y (2.14).

$$u(x,y,z) = e^{jkx} \psi(x,y,z) \quad (2.13)$$

$$u(x,z) = e^{jkx} \psi(x,z) \quad (2.14)$$

Mediante el uso de la función reducida (2.13) en la ecuación (2.11) se llega a la ecuación (2.15). Esta ecuación, permite obtener mediante factorización la ecuación parabólica estandar, ecuación (2.16). Cabe destacar que en la ecuación parabólica estandar solo se han tenido en cuenta las ondas incidentes. Esto es debido a que con las condiciones de contorno con la que se trabajará, es muy difícil que puedan haber ondas que se propaguen de vuelta.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z) + i2k \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, y, z) + k^2(n^2(x, y, z) - 1)u(x, y, z) = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, y, z) + i2k \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) + k^2(n^2(x, y, z) - 1)u(x, y, z) = 0 \quad (2.16)$$

Por último, la forma correspondiente a la ecuación parabólica estandar para dos dimensiones se muestra en la ecuación (2.17).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + i2k \frac{\partial u}{\partial x}(x, z) + k^2(n^2(x, z) - 1)u(x, z) = 0 \quad (2.17)$$

## 3 Propagación en dos dimensiones

---

### 3.1 Métodos numéricos

Para la resolución en dos dimensiones de la ecuación parabólica estándar se proponen dos métodos, el uso de la transformada de Fourier y el uso de diferencias finitas. En los siguientes dos apartados se detallarán ambos métodos.

#### 3.1.1 Transformada de Fourier

Suponiendo que se produce la propagación electromagnética en el vacío, donde el índice de refracción  $n = 1$ , es posible introducir la transformada de Fourier para resolver la ecuación parabólica estándar. Este método de resolución consiste en el uso de la transformada de Fourier para resolver las derivadas parciales que aparecen en la ecuación parabólica estándar de forma más sencilla antes de volver al dominio original.

Como se ha explicado anteriormente, aplicando la transformada de Fourier a la ecuación parabólica, se obtiene una versión más sencilla de la ecuación parabólica estándar, ecuación (3.1).

$$\frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial z^2} + i2k \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 4\pi^2 p^2 U(x, p) + i2k \frac{\partial U(x, p)}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) resultante es una ecuación diferencial homogénea de primer orden cuya solución se muestra en la ecuación (3.2).

$$U(x, p) = e^{\frac{-i2\pi^2 p^2 x}{k}} U(0, p) \quad (3.2)$$

Como se puede observar en la ecuación (3.2), para calcular el campo electromagnético en cualquier punto es necesario hacer uso del campo electromagnético inicial.

Por último, realizando la transformada inversa sobre la ecuación (3.2) se obtiene el campo en el dominio original, ecuación (3.3).

$$u(x, z) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ e^{\frac{-i2\pi^2 p^2 x}{k}} \mathfrak{F} \{ u(0, z) \} \right\} \quad (3.3)$$

A partir de lo explicado anteriormente, en Referencia [1] se propone el algoritmo Split-Step Fourier. Este método permite calcular el campo electromagnético en base a la ecuación obtenida anteriormente pero utilizando la transformada seno de Fourier [Anexo A].



La implementación numérica del algoritmo se muestra en la ecuación (3.4), donde la transformada seno de Fourier inversa no es necesaria ya que  $S^{-1} = 4S$ .

$$u(x + \Delta x, z) = e^{\frac{ik(n^2-1)}{k}} S\{e^{\frac{i\pi^2 l \Delta x}{2kL^2}} S\{u(x, z)\}\} \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Método de diferencias finitas

El método de las diferencias finitas está basado directamente en las derivadas parciales que aparecen en la ecuación de onda escalar que se muestra a continuación, ecuación (3.5).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + i2k \frac{\partial u}{\partial x}(x, z) + k^2(n^2(x, z) - 1)u(x, z) = 0 \quad (3.5)$$

Con el objetivo de que la solución se propague, se calcula el punto medio entre la ubicación inicial y final del campo, ecuación (3.6). Además, se definen las variables (3.7) y (3.8) para facilitar los cálculos numéricos.

$$\xi_m = \frac{x_{m+1} + x_m}{2} \quad (3.6)$$

$$a_m^j = k^2(n_m^j - 1)\Delta z^2 \quad (3.7)$$

$$b = 4ik \frac{\Delta z^2}{\Delta x} \quad (3.8)$$

Diferenciando la ecuación (3.5) e introduciendo las variables presentadas anteriormente, se obtiene a la ecuación (3.9) cuya derivación completa está basada en Referencia [1].

$$u_m^{j-1} + u_m^j(-2 + b + a_m^j) + u_m^{j+1} = -u_{m-1}^{j-1} + u_{m-1}^j(2 + b - a_m^j) - u_{m-1}^{j+1} \quad (3.9)$$

Como se puede observar, el campo electromagnético en cualquier punto  $m$  a lo largo del eje  $x$  puede calcularse mediante el campo en un punto anterior  $m-1$ . Además, en la ecuación (3.9) hay tres alturas  $j$  diferentes lo que resulta en una ecuación con tres incógnitas. Sin embargo, dado que la validez de la ecuación es cierta para cualquier altura, se pueden plantear  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas que pueden ser expresadas en un sistema lineal de matrices (3.10) donde:  $\alpha_m^j = -2 + b + a_m^j$ ,  $\beta_m^j = 2 + b - a_m^j$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & \alpha_1^m & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \alpha_{N-1}^m & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & \beta_1^m & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \beta_{N-1}^m & -1 \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Siendo  $U_m$  los valores por determinar y  $U_{m-1}$  los valores de  $u$  en  $m-1$ .

$$U_m = \begin{bmatrix} u_0^m \\ u_1^m \\ \vdots \\ u_{N-1}^m \\ u_N^m \end{bmatrix} \quad U_{m-1} = \begin{bmatrix} u_0^{m-1} \\ u_1^{m-1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{m-1} \\ u_N^{m-1} \end{bmatrix}$$

Visto en el sistema lineal de matrices que el campo en un punto  $m$  puede ser determinado a partir del campo en el punto  $m-1$ , el del punto  $m-1$  a partir del campo en el punto  $m-2$  y así sucesivamente, el campo en un punto  $m$  puede ser totalmente determinado a partir de las matrices  $U_0$  y  $\beta_m^j$ , donde  $U_0$  es el campo inicial, como se muestra en el sistema lineal de matrices (3.11). Esto funciona unicamente para una superficie plana ya que la superficie es constante desde el inicio hasta el punto  $m$ .

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_m \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & \alpha_1^m & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \alpha_{N-1}^m & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & \beta_1^m & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \beta_{N-1}^m & -1 \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \right)^m \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Para que los resultados de la ecuación (3.11) sean validos, deben converger a medida que  $m \rightarrow \infty$ . Esta convergencia depende de la distancia entre muestras,  $\Delta x$  y  $\Delta z$ , y obliga a que los resultados obtenidos sean neutralmente estables para los valores tomados para  $\Delta x$  y  $\Delta z$ .

A lo largo de este algoritmo se ha hecho uso de diferentes propiedades de las matrices para aumentar la eficiencia del sistema. Para conseguir este aumento en la eficiencia, la matriz que contiene los valores  $\alpha$  se denotará como  $A$  y la que contiene los valores  $\beta$  se denotará como  $B$ . De esta forma, el sistema lineal de matrices queda reducido a la ecuación (3.12).

$$U_m = (A^{-1}B)^m U_0 = C^m U_0 \quad (3.12)$$

En la ecuación (3.12) la matriz  $A$  se debe invertir. Esta será invertible si todos sus autovalores  $\lambda_m \neq 0$ . En caso de no serlo, se podría utilizar una pseudoinversión de esta matriz.

Por otro lado, el uso de la diagonalización en matrices reduce el número de cálculos, lo que se traduce en que el algoritmo sea más eficiente. Además, permite comprobar la estabilidad del algoritmo antes de calcular el campo. Por estos motivos, se procede a diagonalizar  $C^m$ .  $C$  es diagonalizable si todos los autovectores de  $C$  son linealmente independientes y en caso de serlo se puede expresar como se muestra a continuación en las ecuaciones (3.13) y (3.14).

$$C = S\Lambda S^{-1} \quad (3.13)$$

$$C^m = S\Lambda^m S^{-1} \quad (3.14)$$

Donde  $\Lambda$  es la matriz diagonal que al elevarse  $m$  veces supone que cada elemento de la matriz se eleve  $m$  veces como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{N-1} & \\ & & & & \lambda_N \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & & & \\ & \lambda_2^m & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{N-1}^m & \\ & & & & \lambda_N^m \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

### 3.2 Métodos de truncamiento

Debido a que el sistema es neutralmente estable, las ondas que se propagan en el sistema nunca lo abandonarán, provocando reflexiones espurias. Para evitar este efecto se proponen dos métodos de truncamiento que permiten minimizar las reflexiones espurias y reducir el número de cálculos aumentando la eficiencia de los algoritmos que se emplearán.

Los dos métodos que se proponen son la ventana de Hanning y el uso de una capa de absorción. A continuación se detallan ambos métodos.

#### 3.2.1 Ventana de Hanning

El uso de una ventana de Hanning permite limitar el número de cálculos que se realizarán aumentando la eficiencia del sistema a la vez que se evitan un gran número de reflexiones indeseadas mediante una atenuación gradual en el último cuarto del dominio de la ventana.

La ecuación que define la ventana de Hanning se muestra en el sistema (3.16)

$$h_z(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{3N_z}{4} \\ \sin^2\left(\frac{4\pi t}{N_z}\right) & \text{si } \frac{3N_z}{4} \leq t \leq N_z \end{cases} \quad (3.16)$$

#### 3.2.2 Capa de absorción

El uso de una capa de absorción consiste en agregar una parte imaginaria al índice de refracción en la región donde se quieren limitar las reflexiones espurias. En el presente trabajo, la implementación de esta capa de absorción está basada en Referencia [2], donde las reflexiones producidas por la superficie resultan útiles ya que se asemejan a los resultados que se dan en la naturaleza. Sin embargo, las reflexiones provocadas por el límite superior del sistema son indeseables ya que no se asemejan al comportamiento de la troposfera. Por ello, la parte imaginaria sólo se añadirá al índice de refracción en esta región, consiguiendo que las ondas en lugar de reflejarse, se atenúen.

Dado que un cambio brusco del índice de refracción produciría reflexiones, el índice de refracción debe variar lentamente comenzando desde cero e incrementándose gradualmente.

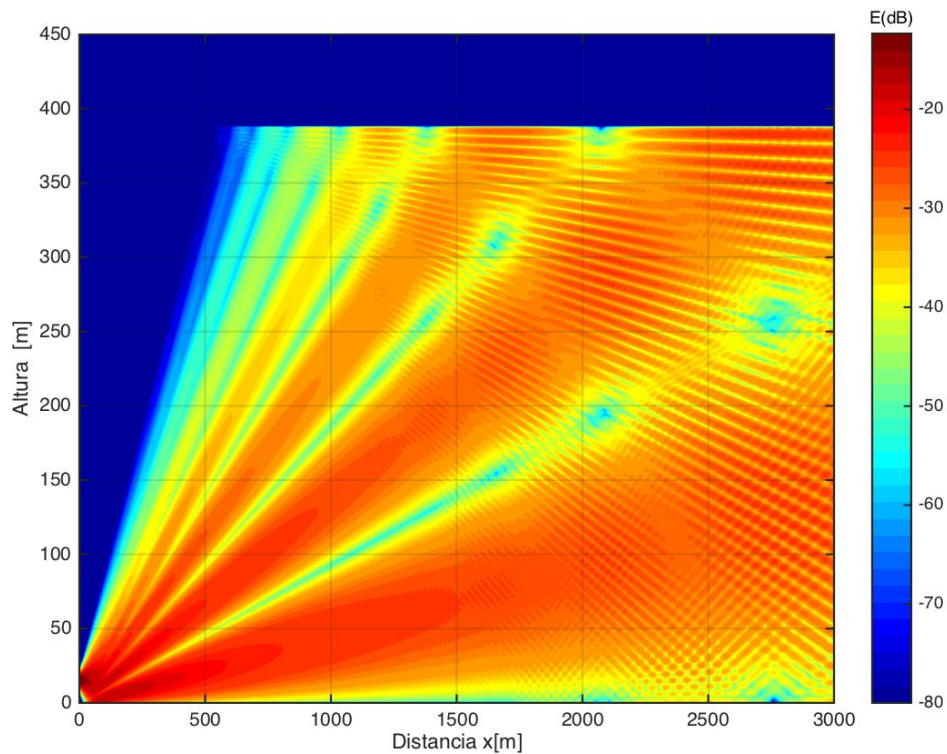
La ecuación implementada sobre el índice de refracción en la región mencionada se muestra en la ecuación (3.17).

$$n = n + \text{Im}(n)$$

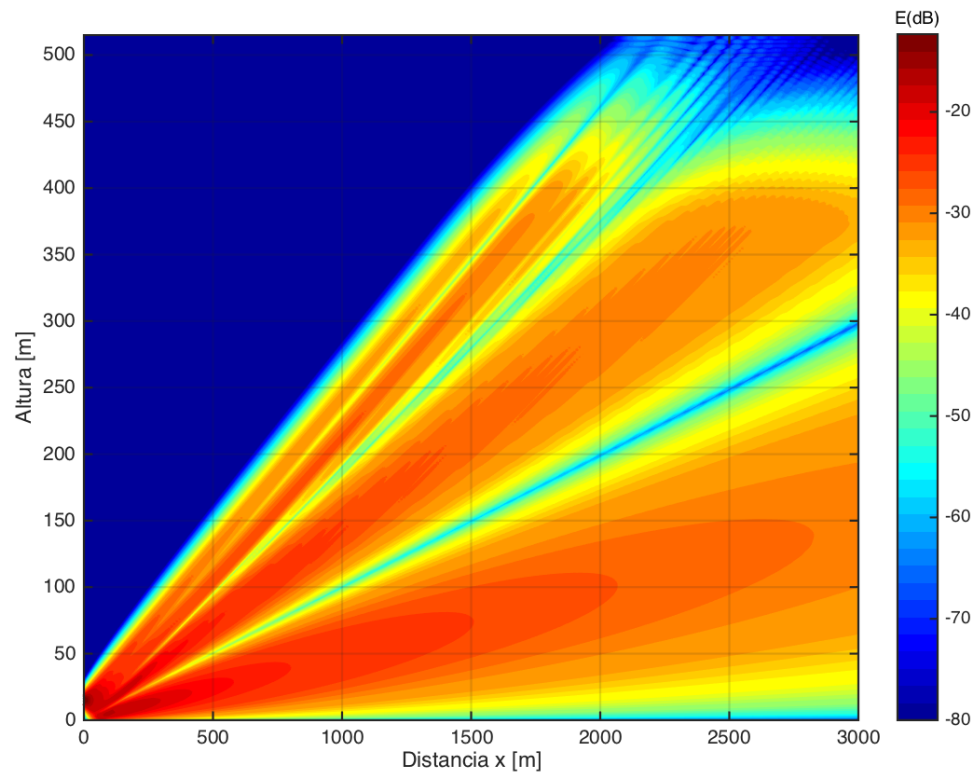
$$\text{Im}(n) = \sigma_0 \left\{ \frac{\text{Altura inicial a la que aplica la capa de absorción [m]}}{\text{Tamaño de la capa de absorción [m]}} \right\} \quad (3.17)$$

El valor elegido para  $\sigma_0$  debe estar comprendido entre dos límites. Por un lado, el límite superior debe impedir que las ondas se atenúen rápidamente ya que esto provocaría reflexiones indeseadas. Por otro lado, el límite inferior debe asegurar que las ondas se atenúen lo suficientemente rápido como para que no lleguen a la frontera del dominio del sistema, ya que esto también provocaría reflexiones indeseadas. Finalmente, el valor utilizado en este trabajo se ha calculado experimentalmente obteniendo el rango  $0.008 < \sigma_0 < 0.02$ .

A continuación, se muestran las representaciones de los campos simulados tanto para el caso en el que se usa la ventana Hanning como para el caso en el que se utiliza la capa de absorción. Como se puede observar los resultados son más satisfactorios en el caso de la capa de absorción ya que evita reflexiones del límite superior mientras que en el caso de la ventana de Hanning si que aparecen algunas reflexiones espurias.



**Figura 3-1: Representación del campo eléctrico usando ventana de Hanning**



**Figura 3-2: Representación del campo eléctrico usando capa de absorción**

### 3.3 Modelado de la fuente

Para asemejarse al comportamiento de una antena directiva, la fuente utilizada durante las simulaciones es un fuente con distribución gaussiana en el campo lejano. Para modelarla se ha partido de la ecuación (3.18), propuesta en Referencia [1].

$$B(\theta) = Ae^{-2\log(2)\frac{\theta^2}{\beta^2}} \quad (3.18)$$

Por sencillez numérica, se ha utilizado la ecuación (3.19) también propuesta en Referencia [1], en la que se calcula el campo inicial en la dirección vertical.

$$u(0,z) = A \frac{k\beta e^{-ik\theta_0 z}}{2\sqrt{2\pi\log(2)}} e^{-\frac{\beta^2}{8\log(2)}k^2(z-z_s)^2} \quad (3.19)$$

A: Constante normalizadora.

$\beta$ : Ancho de haz a -3dB [rad].

$\theta$ : Ángulo de la dirección de propagación [rad].

k: Constante de propagación [rad/m].

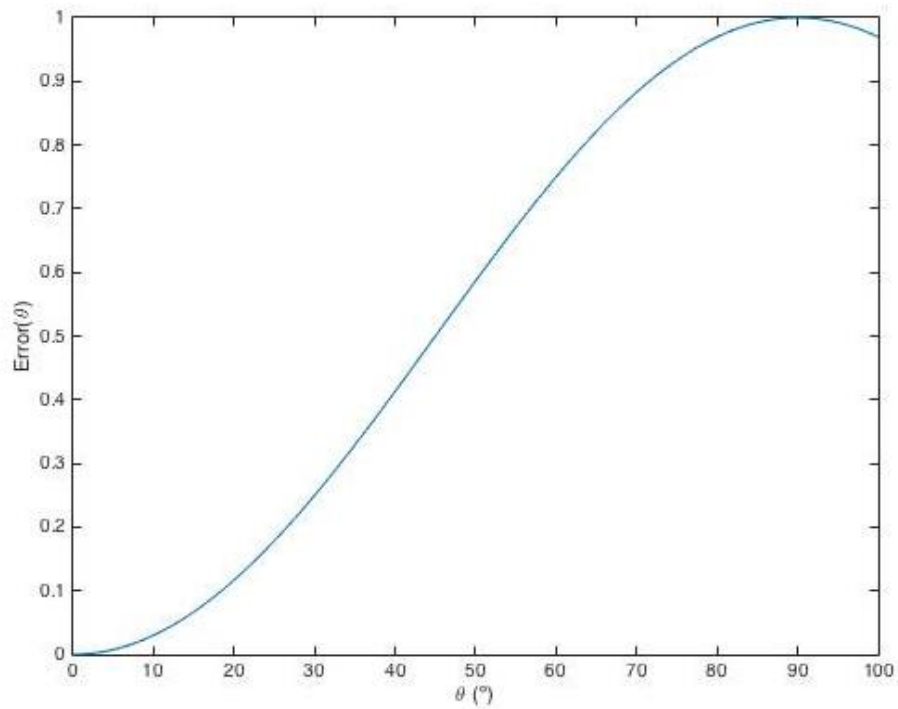
$\theta_0$ : Inclinación del lóbulo [rad].

z: Altura del punto a calcular [m].

$z_s$ : Altura antena [m].

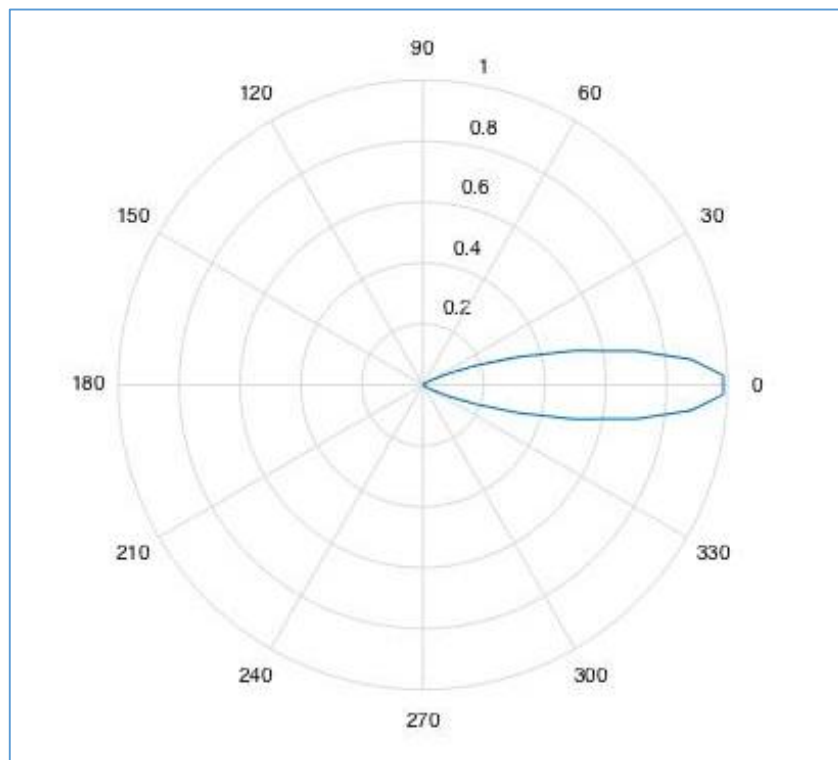
La derivación de la ecuación (2.16) incluye el uso aproximaciones por series de Taylor cuyo error está dominado por el primer término despreciado en la serie. Este término en base a Referencia [1], se asemeja a la ecuación (3.20). Como se puede observar en la Figura 3-3, la función  $\sin^2(\theta)$ , siendo  $\theta$  el ángulo de propagación, tiene un error igual a 0.11 en  $\theta = 20^\circ$ , valor que se tomará como el máximo asumible ya que a partir de  $20^\circ$  el error crece mucho más rápidamente.

$$\frac{1}{k^2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| = \sin^2(\theta) \quad (3.20)$$



**Figura 3-3: Error en función del ángulo de propagación**

Como se ha mencionado, el máximo error asumible se tomará cuando  $\theta = 20^\circ$ , siendo  $\theta = 12^\circ$  el utilizado a lo largo de las simulaciones y que queda determinado en la ecuación (3.19) por el ancho del haz a -3dB ( $\beta$ ).



**Figura 3-4: Ejemplo del lóbulo simulado**



### 3.4 Elección de los parámetros

El algoritmo implementado permite elegir tanto la frecuencia a simular como la distancia entre muestras en los ejes  $x$  y  $z$  ( $\Delta x$  y  $\Delta z$  respectivamente). Sin embargo, la elección de los valores  $\Delta x$  y  $\Delta z$  está comprendida entre dos límites.

Por un lado, el límite superior está impuesto por el criterio de Nyquist y obliga a que:

$$\Delta x < \frac{\lambda}{2}, \Delta z < \frac{\lambda}{2} \quad (3.21)$$

El incumplimiento del criterio de Nyquist provocaría aliasing y por tanto una distorsión de los resultados. En cuanto al límite inferior, está impuesto por la capacidad de cálculo, valores  $\Delta x$  y  $\Delta z$  inferiores a 0.5 provocarían un gran aumento en el tiempo de simulación en la mayoría de computadoras convencionales. Este hecho provoca que al depender  $\lambda$  de la frecuencia ( $\lambda=c/f$ ), la frecuencia utilizada en las simulaciones tenga que ser inferior a 300 MHz de modo que los valores  $\Delta x$  y  $\Delta z$  puedan quedar por encima de 0.5.

A lo largo de las simulaciones realizadas para la propagación en dos dimensiones, la frecuencia utilizada será de 100 MHz, frecuencia dentro del rango utilizado por los radares. Como consecuencia de esta frecuencia y los límites impuestos, los valores  $\Delta x$  y  $\Delta z$  deberán ser inferiores a 3m.

Para determinar los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta z$  se han realizado pruebas experimentales comparando los resultados con el modelo analítico de tierra plana explicado en la sección 3.5.1. La posible utilización de valores  $\Delta x$  y  $\Delta z$  muy pequeños pero dentro de los límites impuestos tienen como consecuencia que, numéricamente, no haya diferencia entre un punto y el anterior por lo que el campo se estaría propagando muy lentamente. Finalmente, se ha decidido utilizar  $\Delta x=1=\Delta z$ , valor que funciona bien y que resulta coherente ya que el campo se propaga de la misma manera tanto en el eje  $x$  como en el  $z$ .

### 3.5 Verificación de los resultados

Con el objetivo de comprobar la validez de los resultados obtenidos, en las simulaciones realizadas se ha calculado la atenuación del campo desde el transmisor hasta el receptor.

$$L = \frac{P_{tx}}{P_{rx}} \quad (3.22)$$

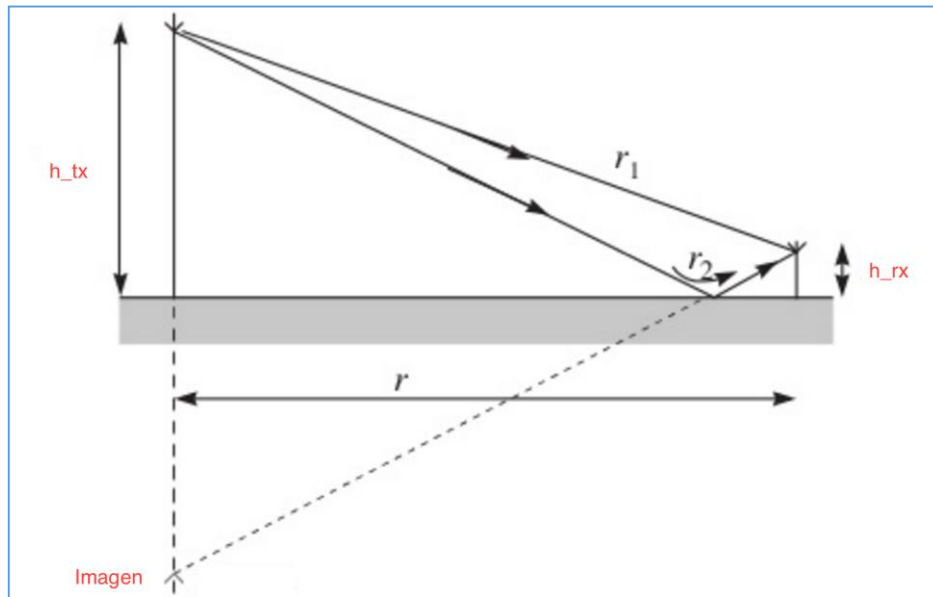
$P_{tx}$  : Potencia efectiva transmisor

$P_{rx}$  : Potencia efectiva receptor

La atenuación obtenida será comparada con diferentes fuentes dependiendo de si el terreno sobre el que se simulará es totalmente plano o presenta irregularidades.

#### 3.5.1 Terreno plano

En caso de que la simulación se realice sobre una superficie lisa, la atenuación obtenida se comparará con el modelo analítico de tierra plana.

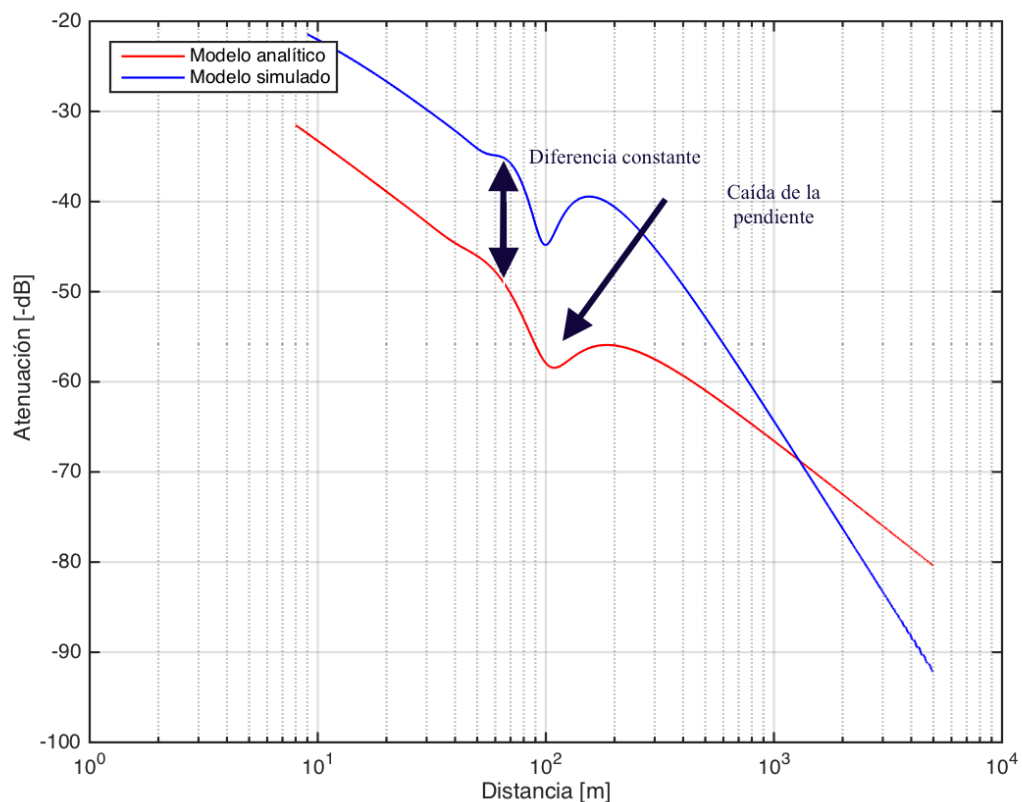


**Figura 3-5: Ilustración modelo de tierra plana**

La ecuación que define la atenuación de este modelo se presenta en la ecuación (3.23) donde  $r$  es la distancia entre el transmisor y emisor,  $h_{tx}$  es la altura del transmisor y  $h_{rx}$  es la altura del receptor:

$$L = \frac{Pr}{Pt} = \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \left| 1 + e^{jk \frac{2h_{tx}h_{rx}}{r}} \right|^2 \quad (3.23)$$

Para comprobar la validez de los resultados de la simulación, estos se comparan con el modelo analítico en los puntos en los que se produce una caída abrupta de la pendiente. La diferencia constante que se da entre los resultados analíticos y los obtenidos en la simulación es debida a que para el modelo analítico se ha utilizado la ecuación (3.18) porque está en función del ángulo de propagación y por tanto resulta más adecuada para su cálculo. Sin embargo, para los cálculos relacionados con la simulación resulta más adecuado el uso de la ecuación (3.19) ya que es función de las coordenadas  $(x,z)$ .



**Figura 3-6: Ejemplo diferencia entre modelo analítico y simulado**

### 3.5.2 Terreno irregular

En caso de que el terreno presente irregularidades, la atenuación obtenida será comparada con diferentes textos científicos y se presentarán conjuntamente con los resultados correspondientes.

### 3.6 Resultados

Como se ha comentado anteriormente, para las simulaciones realizadas se ha utilizado una fuente de distribución gaussiana. A continuación se resumen todos los parámetros utilizados durante las simulaciones:

- Frecuencia: 100 MHz
- Polarización: Linear vertical
- Ancho del haz a -3dB = 12°
- $\Delta x$  y  $\Delta z = 1$  m.
- Altura antena transmisora = 10 m.
- Altura antena receptora = 10 m.
- Método de truncamiento: Capa de absorción

#### 3.6.1 Terreno plano

A continuación se muestra la representación del campo eléctrico para los dos algoritmos implementados. Como se puede observar, para este caso no se observan diferencias entre los dos algoritmos implementados.

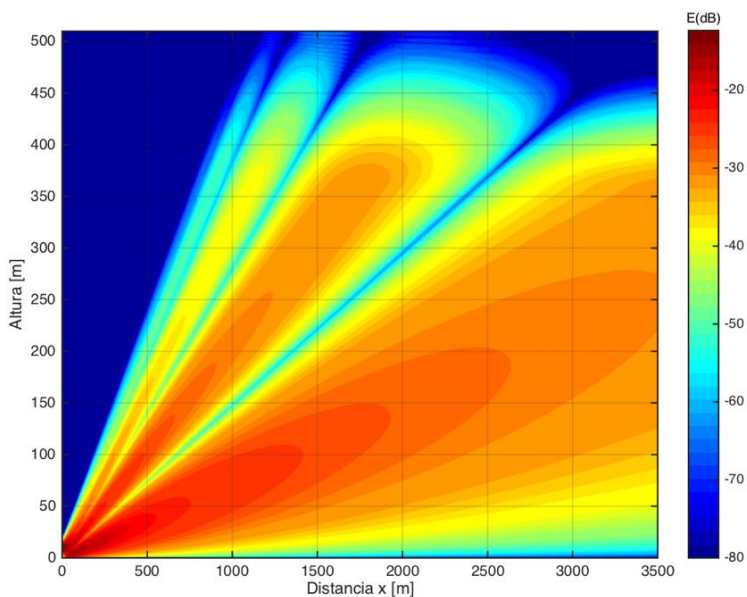


Figura 3-7: Campo simulado mediante diferencias finitas

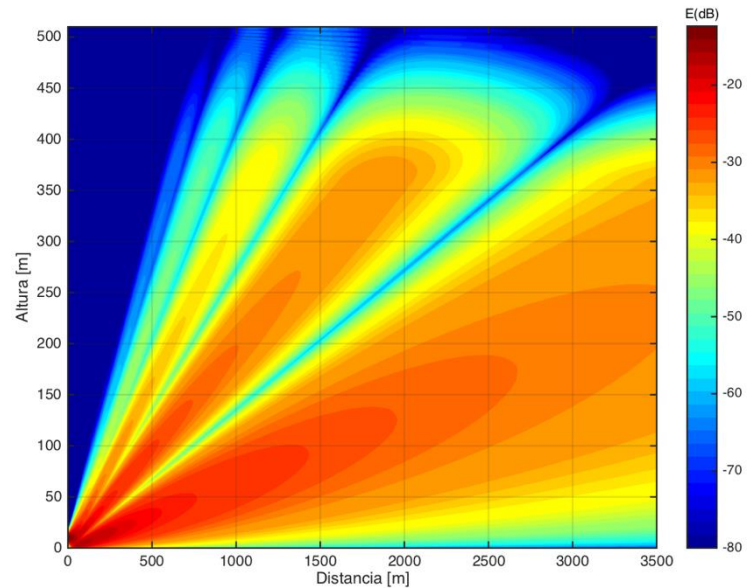
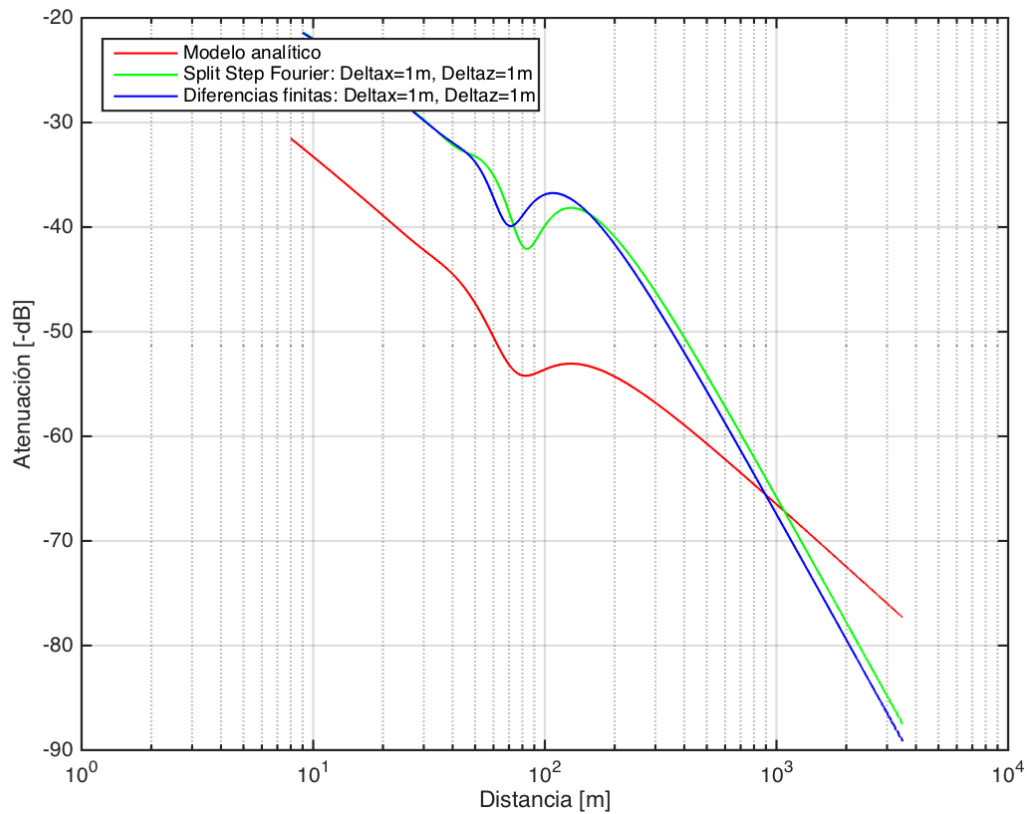


Figura 3-8: Campo simulado mediante Split-Step Fourier

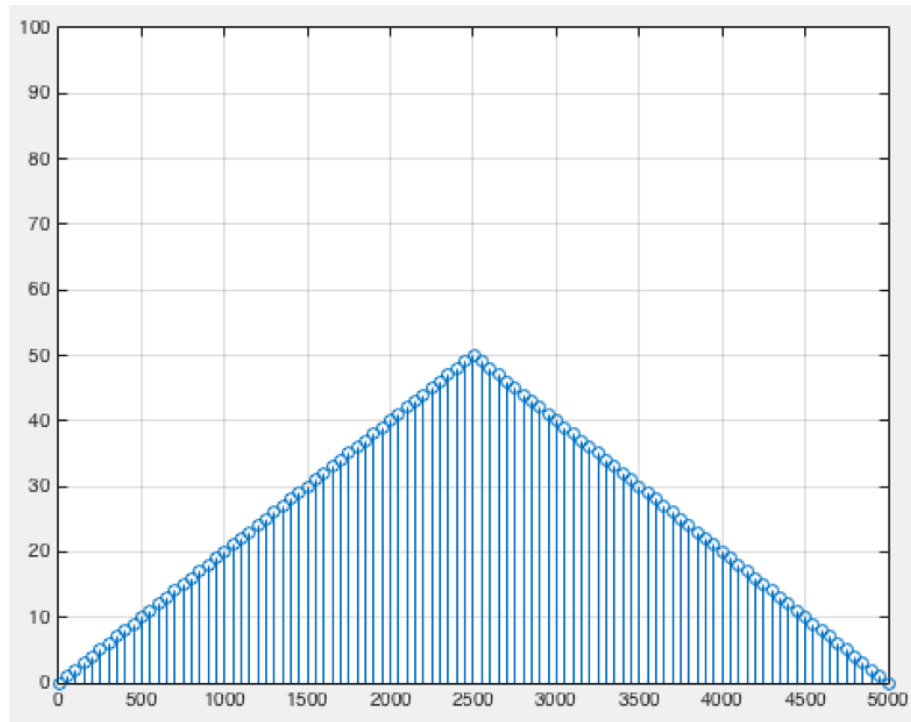


**Figura 3-9: Terreno plano-Comparación modelo analítico y algoritmos simulados**

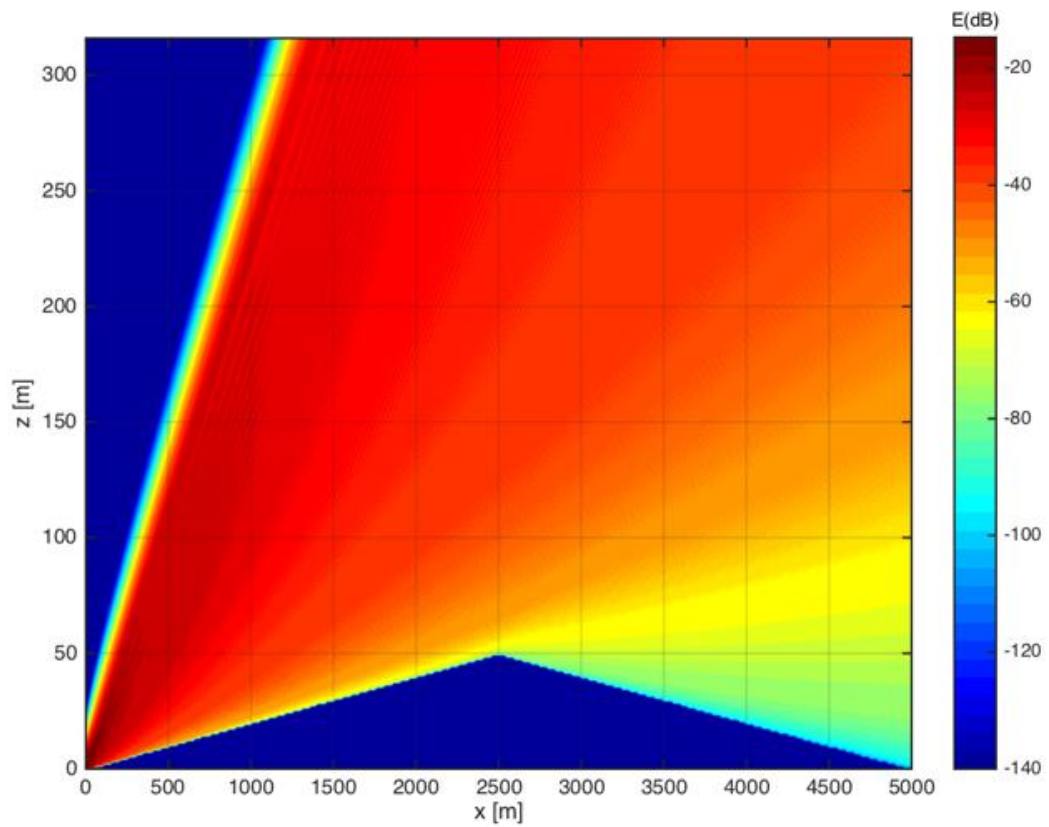
Para el caso de la atenuación, los dos algoritmos apenas presentan diferencias entre sí, únicamente una pequeña desviación de fase. A su vez, con respecto al modelo analítico ambos algoritmos presentan la misma caída abrupta en la pendiente con una diferencia constante con respecto al modelo analítico que ya fue comentada en la sección 3.5.1. De esta forma, se da validez a ambos algoritmos para el caso en el que el terreno es plano.

### 3.6.2 Terreno irregular

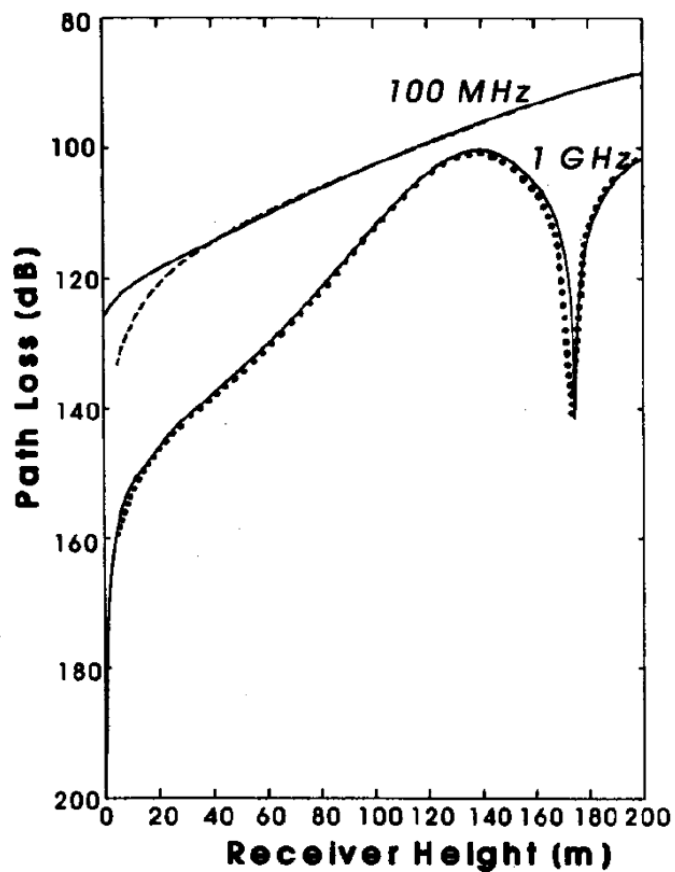
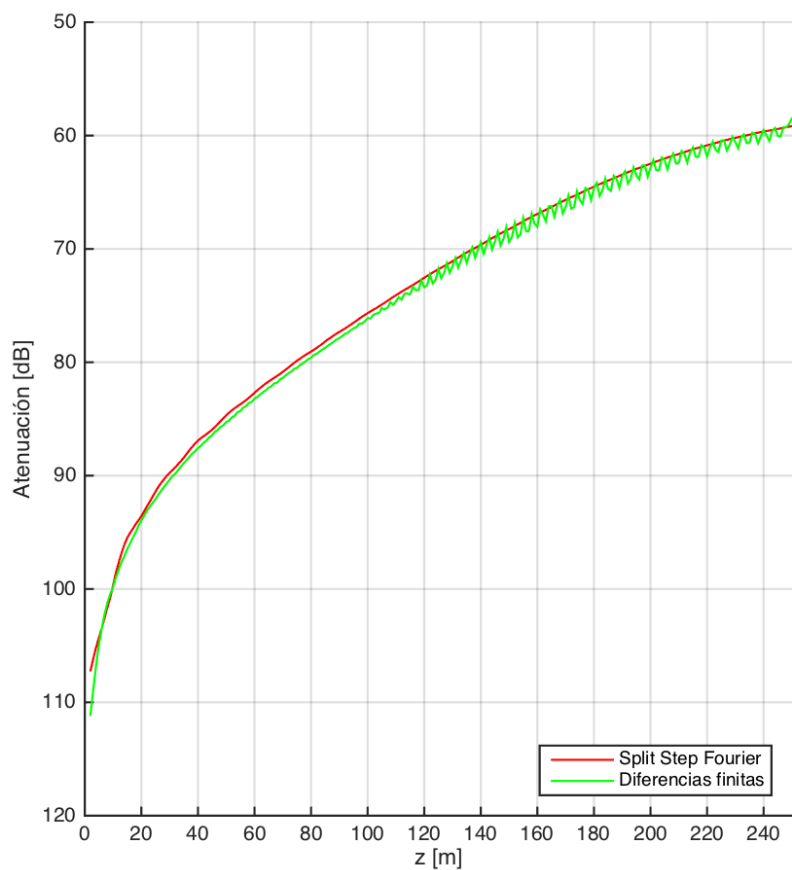
Para demostrar la validez de los dos algoritmos en el caso en el que se trabaje con un terreno irregular, se ha utilizado como modelo la figura que se muestra a continuación y que fue estudiada en Referencia [3] de forma que se podrán contrastar ambos resultados. Sin embargo, solo se han podido comparar los resultados a 100 MHz debido a las limitaciones que poseen los dos algoritmos implementados respecto a la frecuencia y que ya se comentaron en la sección 3.4.



**Figura 3-10: Modelo terreno irregular**



**Figura 3-11: Terreno irregular-Campo simulado mediante Split-Step Fourier**



**Figura 3-12: Terreno irregular-Atenuación campo simulado vs Atenuación campo [3]**

Comparando las atenuaciones de ambos algoritmos se puede ver que son prácticamente idénticas entre sí aunque se podría destacar una pequeña oscilación para el caso de las diferencias finitas.

Con respecto a los resultados proporcionados en la Referencia [3], se puede observar que la pendiente de la atenuación es muy parecida, aproximadamente de uno 40 dB, confirmando así la validez de los resultados.

## 4 Propagación en tres dimensiones

---

### 4.1 Métodos numéricos

Para el caso de la propagación en tres dimensiones únicamente se ha desarrollado un método de resolución de la ecuación parabólica estándar. Este método está basado en el uso de la transformada de Fourier cuyas bases se han explicado en la sección 3.1.1, sin embargo, dado que el dominio numérico se ha de extender de dos a tres dimensiones, el algoritmo implementado se ha modificado con respecto al caso de dos dimensiones. El algoritmo está basado en Referencia [4] y sus detalles se explican a lo largo de esta sección.

Partiendo de la transformada de Fourier de un campo inicial  $E_z$  creado por una fuente con polarización lineal vertical, se va a descomponer el mismo en parte par e impar, ecuación (4.1), donde  $\rho(k_z)$  es el coeficiente de reflexión y  $\Delta s$  es la impedancia de superficie.

$$\bar{E}_z(0^+, k_y, k_z) = \left[ \frac{1}{2}(1 + \rho(k_z))\bar{E}_{ze}(0^+, k_y, k_z) \right] + \left[ \frac{1}{2}(1 - \rho(k_z))\bar{E}_{zo}(0^+, k_y, k_z) \right] \quad (4.1)$$

$$\rho(k_z) = \frac{k_z - \Delta s k_0}{k_z + \Delta s k_0} \quad (4.2)$$

$$\Delta s \approx \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0}}} \quad (4.3)$$

Para que la onda se propague desde una ubicación  $x$  hasta una nueva ubicación  $x + \Delta x$ , la ecuación (4.1) debe multiplicarse por el operador  $e^{jk_x \Delta x}$  llegando a la ecuación (4.4)

$$\bar{E}_z(x + \Delta x, k_y, k_z) = \left[ \frac{1}{2}(1 + \rho(k_z))\bar{E}_{ze}(0^+, k_y, k_z) \right] e^{jk_x \Delta x} + \left[ \frac{1}{2}(1 - \rho(k_z))\bar{E}_{zo}(0^+, k_y, k_z) \right] e^{jk_x \Delta x}$$

Realizando una integral doble sobre la ecuación (4.4) se obtiene la ecuación (4.5). Como se puede observar, la ecuación (4.5) se corresponde con la definición de la transformada inversa de Fourier de dos dimensiones con respecto a  $k_y$  y  $k_z$ . Una vez calculada la transformada, se obtiene el campo en el punto buscado.

$$E_z(x + \Delta x, k_y, k_z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}_z(x + \Delta x, k_y, k_z) e^{i(k_y z + k_z z)} dk_y dk_z \quad (4.5)$$



En caso de que el terreno no sea completamente plano, es decir, contenga algún tipo de irregularidad como puede ser un obstáculo, aparece una importante modificación con respecto al caso de dos dimensiones. El procedimiento que se ha seguido consiste en calcular el campo hasta el punto donde se encuentre el obstáculo y una vez en ese punto, realizar ciertos ajustes sobre el campo eliminando la parte que incide directamente sobre la irregularidad. El motivo de seguir este procedimiento es que el campo dentro del obstáculo está diseñado para ser nulo y no es eliminado directamente como sucedía para la propagación en dos dimensiones. Por tanto, el campo en la nueva posición  $x$ , la que se encuentra inmediatamente posterior al obstáculo, estará compuesto por el campo que no ha incidido sobre el obstáculo y por el que se ha reflejado en el contorno del obstáculo.

Para que el campo se pueda seguir propagando según el algoritmo utilizado, el campo posterior al obstáculo debe modificarse para que sea similar al de la ecuación (4.1). Por ello, se va descomponer en parte par e impar asegurando además que no existen discontinuidades (4.6) y (4.7).

$$E_{zo}(x, y, z) = \begin{cases} E_z(x, y, z) & \text{si } z > 0 \\ -E_z(x, y, -z) & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$E_{ze}(x, y, z) = \begin{cases} E_z(x, y, z) & \text{si } z > 0 \\ E_z(x, y, -z) & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Realizando la transformada de Fourier sobre las partes par e impar del campo se obtienen la ecuaciones (4.8) y (4.9).

$$\bar{E}_{ze}(x, k_y, k_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{ze}(x, y', z') e^{i(k_y y' + k_z z')} dy' dz' \quad (4.8)$$

$$\bar{E}_{zo}(x, k_y, k_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{zo}(x, y', z') e^{i(k_y y' + k_z z')} dy' dz' \quad (4.9)$$

Por último, multiplicando las ecuaciones (4.8) y (4.9) por los factores (4.10) y (4.11) y sumando ambos resultados, se obtiene una ecuación similar a la ecuación (4.1). Este procedimiento puede ser repetido tantas veces como obstáculos existan.

$$\frac{1}{2}(1 + \rho(k_z)) \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \rho(k_z)) \quad (4.12)$$

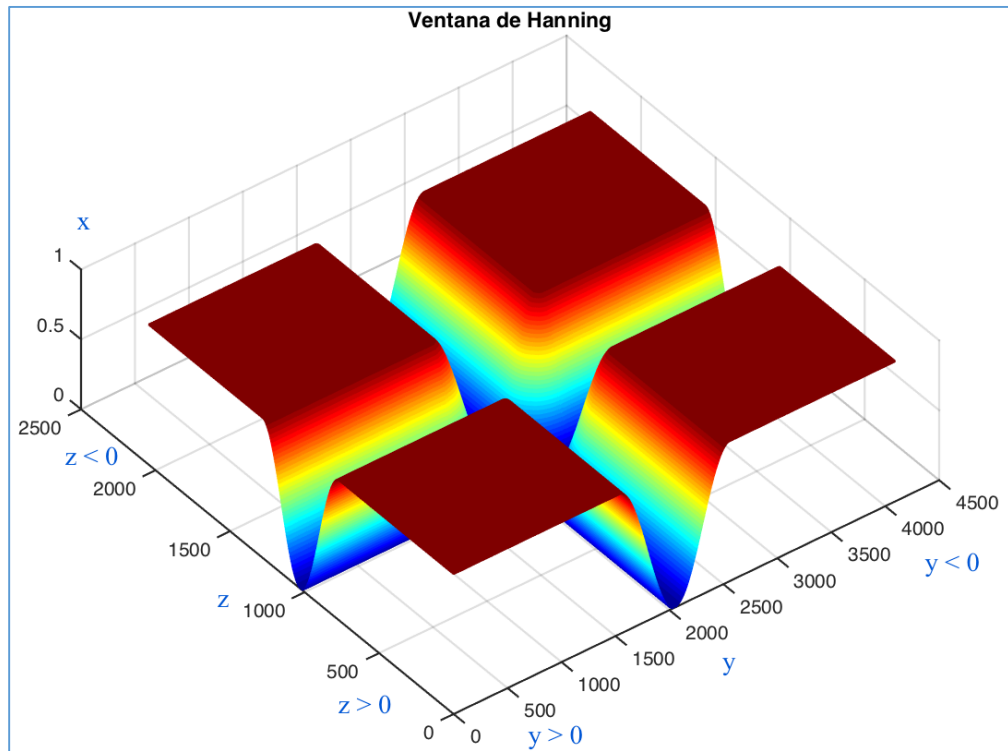
## 4.2 Métodos de truncamiento

Como en el caso de la propagación en dos dimensiones, se hace necesario aumentar la eficiencia del algoritmo para obtener un tiempo de simulación aceptable. Además, también se debe minimizar la aparición de reflexiones espurias que distorsionarían los resultados.

Para evitar estos dos problemas, se va a diseñar una ventana de Hanning tridimensional. Esta ventana está definida por el siguiente par de ecuaciones (4.13) y (4.14)

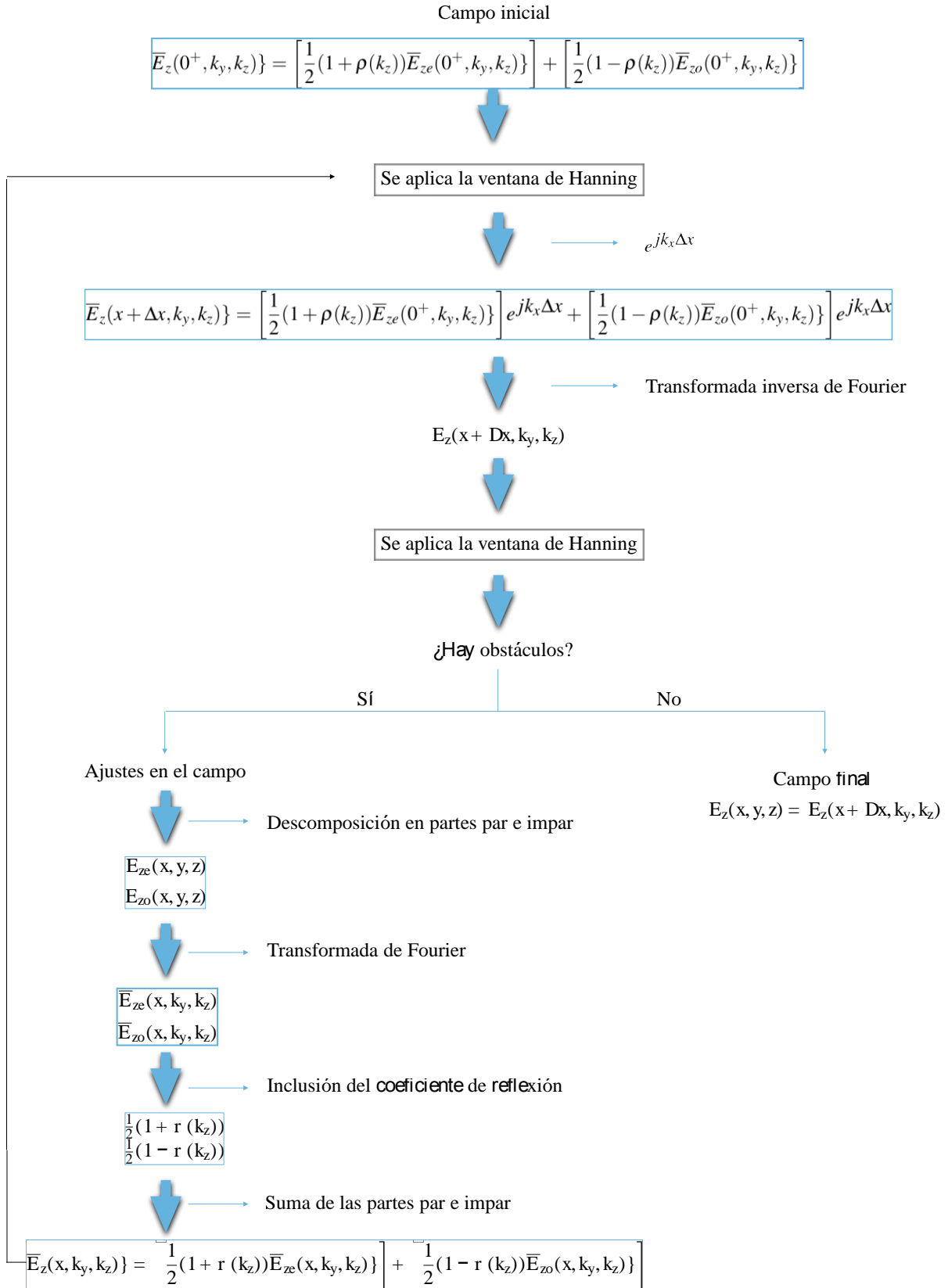
$$h_z(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{3N_z}{8} \\ \sin^2\left(\frac{4\pi t}{N_z}\right) & \text{si } \frac{3N_z}{8} \leq t \leq \frac{N_z}{2} \end{cases} \quad (4.13)$$

$$h_y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{3N_y}{8} \\ \sin^2\left(\frac{4\pi t}{N_y}\right) & \text{si } \frac{3N_y}{8} \leq t \leq \frac{N_y}{2} \end{cases} \quad (4.14)$$



**Figura 4-1: Ejemplo ventana de Hanning tridimensional**

A lo largo del algoritmo implementado, el uso de la ventana de Hanning es recurrente. A continuación, se muestra un diagrama con el algoritmo implementado y el uso de la ventana de Hanning.



**Figura 4-2: Diagrama algoritmo implementado**

### 4.3 Modelado de la fuente

La fuente utilizada para la propagación en 3D tiene, al igual que en el caso de la propagación en 2D, una distribución gaussiana con el fin de simular una antena directiva. La fuente utilizada está definida por la ecuación (4.15) basada en Referencia [4].

$$g(y, z) = A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} e^{-(z - Ht)^2 / 2\sigma_z^2} e^{ik_0 \sin\beta_0} \delta(y) \quad (4.15)$$

A: Constante normalizadora.

$\sigma_z$ : Desviación estandar de la fuente.

$\delta(y)$ : Delta de Dirac.

$k_0$ : Constante de propagación [rad/m].

$\beta_0$ : Inclinación del lóbulo [rad].

$z$ : Altura del punto a calcular [m].

$Ht$ : Altura antena [m].

$\theta$ : Ancho del haz a -3 dB [rad].

El ancho del haz a -3 dB es controlado mediante la desviación estandar de la fuente y al igual que en la sección 3.3, el máximo error asumible permitido por el método de la ecuación parabólica se dará cuando  $\theta = 20^\circ$ . Para las simulaciones realizadas se utilizará un ancho del haz a -3 dB de  $15^\circ$ , que se corresponde con  $\sigma_z = \lambda$ .

A su vez, la fuente utilizada estará polarizada verticalmente y tendrá una inclinación  $\beta_0$  nula por lo que la ecuación (4.15) se puede reducir a la ecuación (4.16)

$$g(y, z) = A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} e^{-(z - Ht)^2 / 2\sigma_z^2} \delta(y) \quad (4.16)$$

Realizando la transformada de Fourier de dos dimensiones sobre la ecuación (4.14), la fuente ya solo dependerá de  $z$  dado que la transformada con respecto a  $y$  de  $\delta(y) = 1$ . Tras esta consideración se llega a la ecuación (4.17).

$$\bar{g}(k_z) = A e^{-k_z Ht} e^{-k_z^2 \sigma_z^2 / 2} \quad (4.17)$$

Suponiendo que  $A=1$  y descomponiendo la ecuación (4.17) en partes par e impar, quedan definidas el par de ecuaciones (4.18) y (4.19) que serán utilizadas en el desarrollo del campo electrico inicial del que parte el algoritmo.

$$\bar{g}_e(k_z) = 2e^{-k_z^2 \sigma_z^2 / 2} \cos(k_z H t) \quad (4.18)$$

$$\bar{g}_o(k_z) = -2ie^{-k_z^2 \sigma_z^2 / 2} \sin(k_z H t) \quad (4.19)$$

Seguidamente, partiendo de la densidad de corriente generada por la fuente definida en la ecuación (4.20) , la relación existente entre la densidad de corriente y el campo eléctrico inicial es la que aparece en la ecuación (4.21).

$$\vec{J} = \hat{z} I_o l \delta(y-0) g(z) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} E_z(0^+, y, z) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \delta(y'-0) g(z') dy' dz' + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_z(z+z')} \rho(k_z) dk_z \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{+\infty} g(z') dz' \\ &\quad - \frac{i}{2} \sum \text{Res}[\rho(k_z)] e^{ik_{zn}z} \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \delta(y'-0) g(z') e^{ik_{zn}z} \\ &= \frac{1}{2} g(z) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(z') dz' \cdot \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_z(z+z')} \rho(k_z) dk_z - i \sum \text{Res}[\rho(k_z)] e^{ik_{zn}(z+z')} \right] \approx \frac{1}{2} g(z) \end{aligned} \quad (4.21)$$

La segunda parte de la ecuación (4.21) describe el comportamiento de las ondas sobre la superficie y es finalmente ignorada dado que las ondas sobre la superficie se atenúan completamente a medida que se propagan.

Descomponiendo el campo electrico inicial en el dominio de Fourier en partes par e impar como ya se hizo en las ecuaciones (4.8) , (4.9) y cambiando los limites de integración con respecto a  $z$  de 0 a  $+\infty$  por  $-\infty$  a  $+\infty$  mediante el factor  $1/2$  , se llega a la ecuación (4.22) donde  $\rho(z)$  es el coeficiente de reflexión definido en la ecuación (4.2).

$$\begin{aligned} \bar{E}_z(0^+, k_y, k_z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} dz e^{-ik_y y} [e^{ik_z z} + \rho(k_z) e^{ik_z z}] E_z(0^+, y, z) \\ \bar{E}_z(0^+, k_y, k_z) &= \frac{1}{2} [1 + \rho(z)] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{ze}(0^+, y, z) e^{-i(k_y y + k_z z)} dy dz \\ &\quad + \frac{1}{2} [1 - \rho(z)] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{zo}(0^+, y, z) e^{-i(k_y y + k_z z)} dy dz \\ &= \frac{1}{2} [1 + \rho(z)] \bar{E}_{ze}(0^+, y, z) + \frac{1}{2} [1 - \rho(z)] \bar{E}_{zo}(0^+, y, z) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Desarrollando las ecuaciones (4.18) y (4.19) mediante la descomposición en partes par e impar y realizando sobre ellas la transformada de Fourier, se obtienen las ecuaciones (4.23) y (4.24) respectivamente. Por último, introduciendo estas dos últimas ecuaciones en la ecuación (4.22) se llega a la ecuación (4.25) que define el campo electrico inicial implementado.

$$\bar{E}_{ze}(0^+, y, z) = \frac{1}{2} \bar{g}_{ze}(k_z) = e^{(-k_z^2 \sigma_z^2 / 2)} \cos(k_z H t) \quad (4.23)$$

$$\bar{E}_{zo}(0^+, y, z) = \frac{1}{2} \bar{g}_{zo}(k_z) = -ie^{(-k_z^2 \sigma_z^2 / 2)} \sin(k_z H t) \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{2} [1 + \rho(z)] e^{(-k_z^2 \sigma_z^2 / 2)} \cos(k_z H t) - i \frac{1}{2} [1 - \rho(z)] e^{(-k_z^2 \sigma_z^2 / 2)} \sin(k_z H t) \quad (4.25)$$

#### 4.4 Elección de los parámetros

Los parámetros configurables en el algoritmo implementado son la frecuencia, la distancia entre muestras en los ejes  $x, y, z$  ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ) y el tamaño de la ventana de Hanning definida por  $N_y$  y  $N_z$ . Sin embargo, al igual que en el caso de dos dimensiones, la elección de valores tiene ciertos límites. Estos límites vienen dados por dos motivos, la eficiencia del sistema y la aparición de aliasing en los resultados.

Para evitar la aparición de aliasing, los valores de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  están sujetos a ciertas restricciones que se muestran a continuación donde  $\theta$  es el ancho del haz a -3 dB.

$$\Delta l = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2} \quad (4.26)$$

$$\Delta l \leq \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \quad (4.27)$$

$$\Delta x \leq \frac{1}{2 \tan \theta \sqrt{\frac{1}{(N_y \Delta y)^2} + \frac{1}{(N_z \Delta z)^2}}} \quad (4.28)$$

Para que la ventana de Hanning sea lo suficientemente efectiva y evite reflexiones espurias, los valores  $N_y$  y  $N_z$  que definen su tamaño deben ser lo suficientemente grandes, tomándose siempre valores superiores a  $N_y = 1024$  y  $N_z = 1024$ . Por norma general, los valores tomados para las distancias entre muestras serán  $\Delta y = \Delta z = \lambda$ . En cuanto a  $\Delta x$ , en caso de ser un terreno sin irregularidades se tomará  $\Delta x = 100$  pero si contiene irregularidades es conveniente utilizar un valor inferior ya que podrían ser no detectadas.

Otros valores que respeten las condiciones impuestas son igualmente válidos, pero conviene tener en cuenta que reduciendo la distancia entre muestras se aumenta considerablemente el tiempo de simulación del algoritmo.

## 4.5 Verificación de los resultados

Con el objetivo de comprobar la validez del algoritmo, además del campo eléctrico  $E(\text{dB})$  se ha calculado el factor de propagación ( $F$ ). El cálculo del factor de propagación en lugar de la atenuación viene motivado por su importancia en aplicaciones 3D para radar y su utilidad para poder comparar resultados con un mayor número de fuentes científicas.

El factor de propagación se define como muestra la ecuación (4.29) basándose en Referencia [5] donde  $E_0$  es el campo eléctrico en el vacío.

$$F = \frac{|E|}{|E_0|} \quad (4.29)$$

Además, a partir del factor de propagación y la definición de la atenuación en el vacío (4.30), se podría determinar la atenuación del campo, ecuación (4.31).

$$L_{fs} = 32.45 + 20 \log(f) + 20 \log(r) \quad (4.30)$$

$$L = L_{fs} - 20 \log(F) \quad (4.31)$$

Los resultados obtenidos se compararán con el modelo analítico de dos rayos que es explicado posteriormente y con diferentes textos científicos.

### 4.5.1 Modelo de dos rayos

El modelo de dos rayos es un modelo que permite conocer la reflexión de las señales sobre la tierra mediante óptica geométrica. A continuación se muestra una representación del modelo.

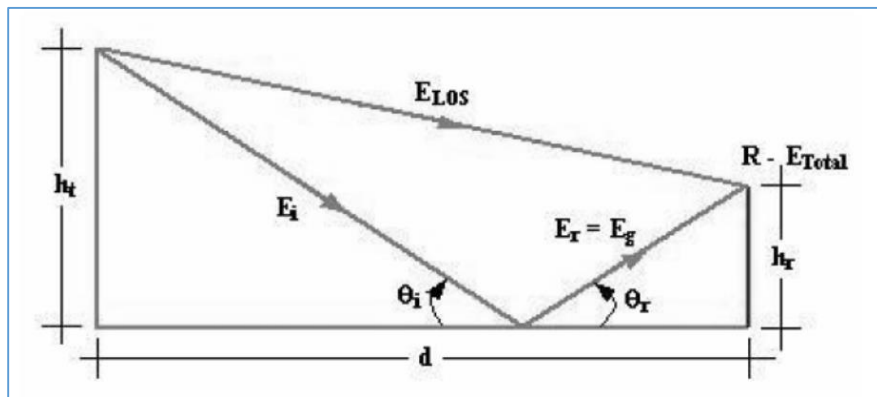


Figura 4-3: Ilustración modelo de dos rayos



## 4.6 Resultados

Como se ha comentado anteriormente, para este algoritmo se ha utilizado una fuente de distribución gaussiana con un ancho del haz a -3 dB de  $15^\circ$  y una polarización lineal vertical. Estos parámetros no variarán a lo largo de las simulaciones. Esto mismo sucederá con el tamaño de la ventana de Hanning que se ha mantenido constante con  $N_y = 4096$  y  $N_z = 2048$ . Sin embargo, la altura de la antena transmisora, la altura de la antena receptora, la frecuencia y los valores  $\Delta x, \Delta z, \Delta y$  serán diferentes para los diferentes escenarios y se detallarán al comienzo de cada uno de ellos.

### 4.6.1 Terreno plano

Para el escenario en el que el terreno es plano, los parámetros utilizados son:

- Frecuencia: 1 GHz.
- $\Delta y = \Delta z = 0.3$  m.
- $\Delta x = 100$  m.
- Altura antena transmisora = 30 m.
- Altura antena receptora = 2.1 m.

A continuación, la variación del campo a lo largo del eje y y las fuentes comparadas:

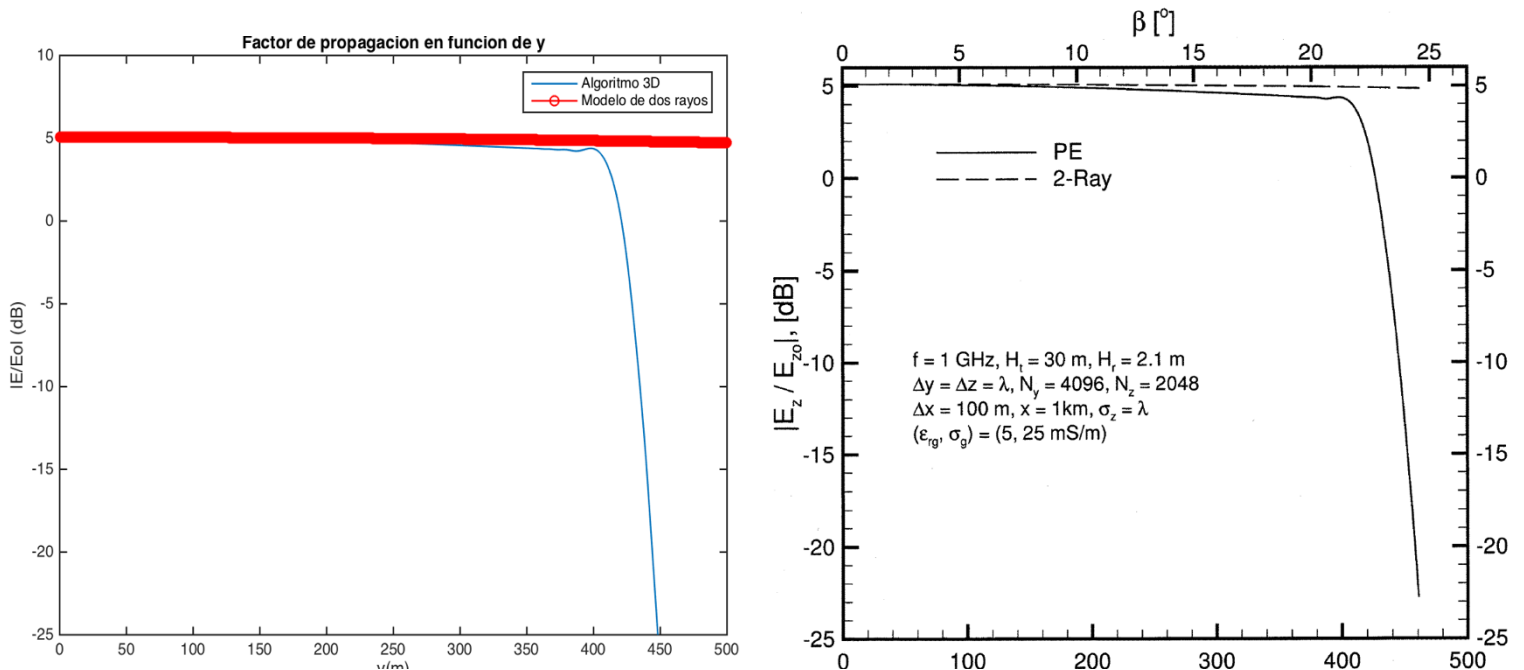
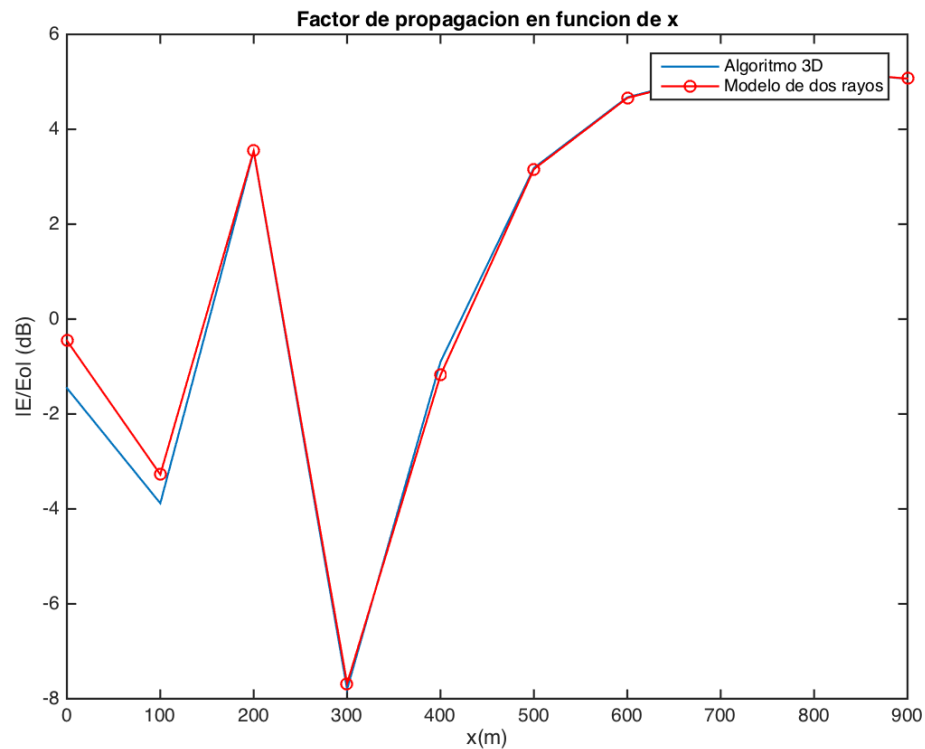


Figura 4-4: Terreno plano- Factor de propagación simulado vs Factor de propagación [4]

Como se puede observar, los resultados son muy satisfactorios. Respecto al modelo de dos rayos, los resultados parecen válidos hasta una distancia de 400 m pero si se contrastan con los obtenidos en Referencia [4] se puede apreciar claramente que son prácticamente idénticos.

Con respecto a la variación sobre el eje  $x$ , en los primeros 100 m se observa una pequeña diferencia entre el modelo de dos rayos y los resultados obtenidos. No obstante, a partir de 100 m y hasta el final de la simulación los resultados son idénticos.



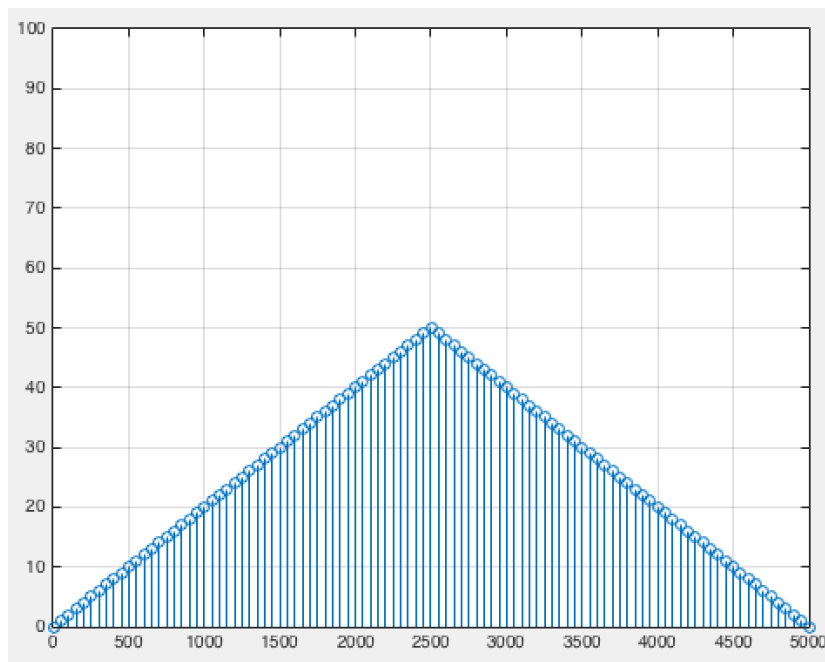
**Figura 4-5: Terreno plano-Factor de propagación en función de x**

### 4.6.2 Terreno irregular I

El primer terreno irregular es el mismo que se comparó para el caso de la propagación en dos dimensiones. Los parámetros utilizados son:

- Frecuencia: 1 GHz y 100 MHz.
- $\Delta y = \Delta z = 0.3$  m y 3 m.
- $\Delta x = 50$  m.
- Altura antena transmisora = 10 m.
- Altura antena receptora = 10 m.

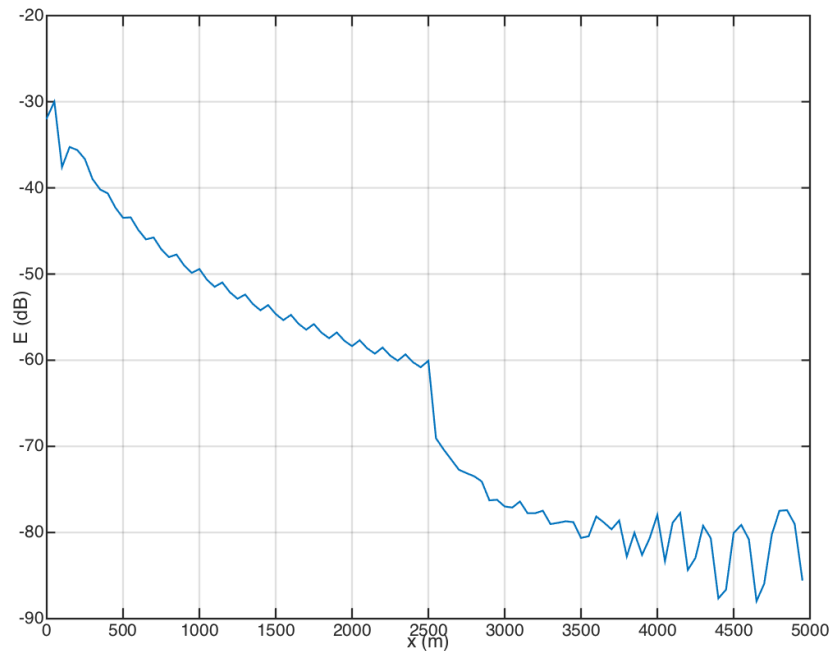
En la figura que se muestra a continuación se encuentra el modelo utilizado para este terreno :



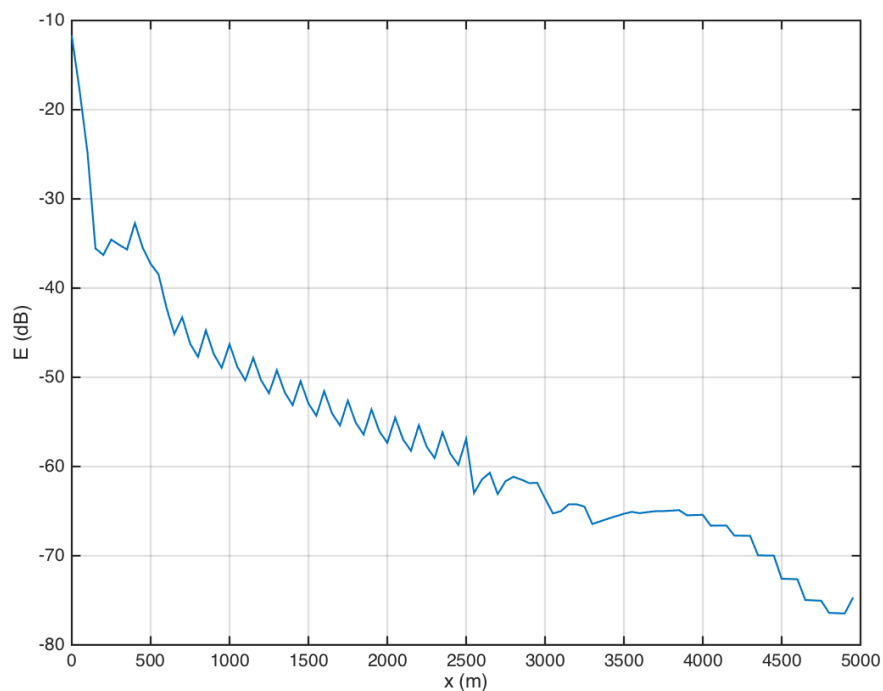
**Figura 4-6: Modelo terreno irregular I**

En las figuras posteriores, se muestra la variación del campo en dB a lo largo del eje  $x$  para 1 GHz y 100 MHz respectivamente. Lamentablemente, no se han podido comparar los resultados con los mostrados en Referencia [3] ya que el algoritmo por falta de tiempo no tiene implementado la variación de los resultados en función de la altura.

De todas formas, se puede observar en ambas figuras la caída de la pendiente a mitad del trayecto debido a la pérdida de línea de vista provocada por el punto más elevado del terreno. Además, se puede ver como a pesar de que la simulación de 1 GHz comienza en -30 dB, al final de la simulación ambas frecuencias presentan un valor de -80 dB lo que supone que a 100 MHz el campo se atenúa más rápidamente.



**Figura 4-7: Terreno irregular I- Campo simulado a 1 GHz**



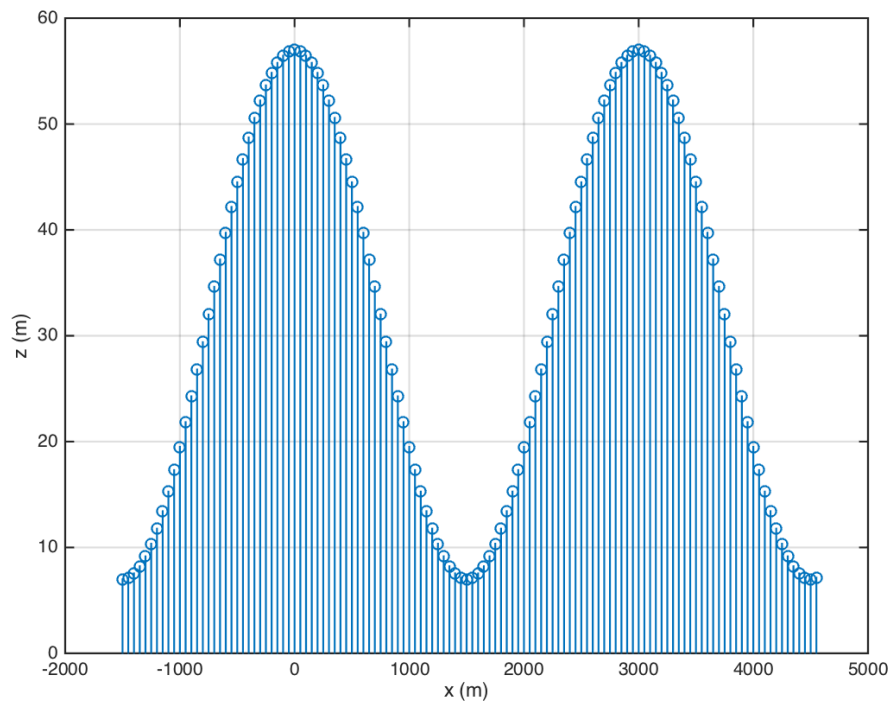
**Figura 4-8: Terreno irregular I- Campo simulado a 100 MHz**

### 4.6.1 Terreno irregular II

Para el segundo terreno irregular, los parámetros utilizados son:

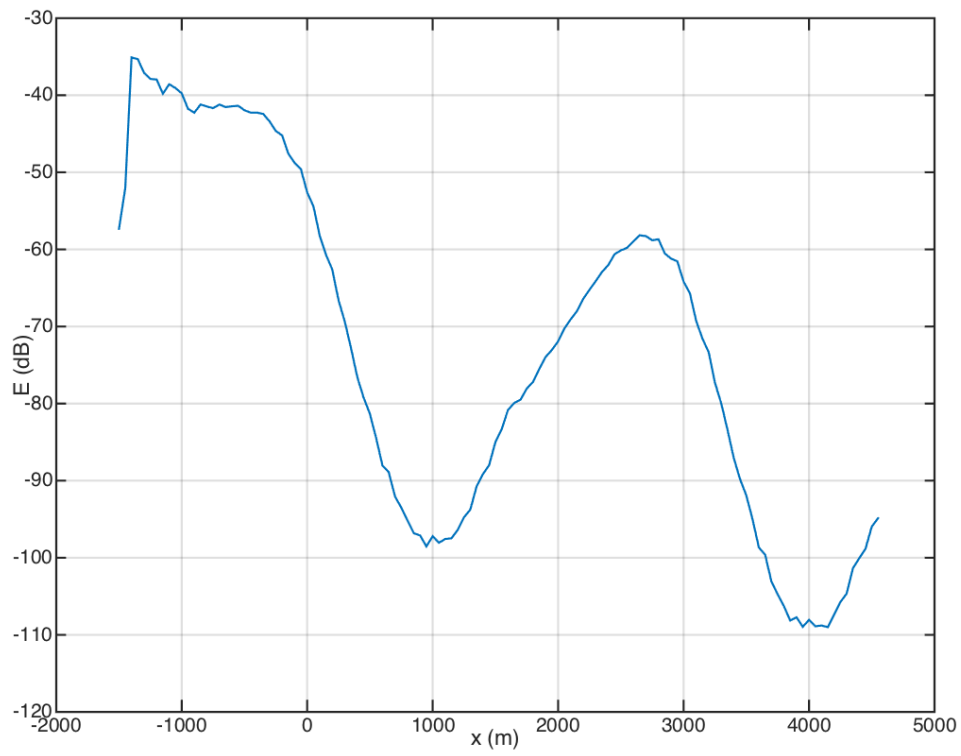
- Frecuencia: 0.9 GHz.
- $\Delta y = \Delta z = 0.33$  m.
- $\Delta x = 50$  m.
- Altura antena transmisora = 57 m.
- Altura antena receptora = 7 m.

En la figura que se muestra a continuación se encuentra el modelo utilizado para este terreno :

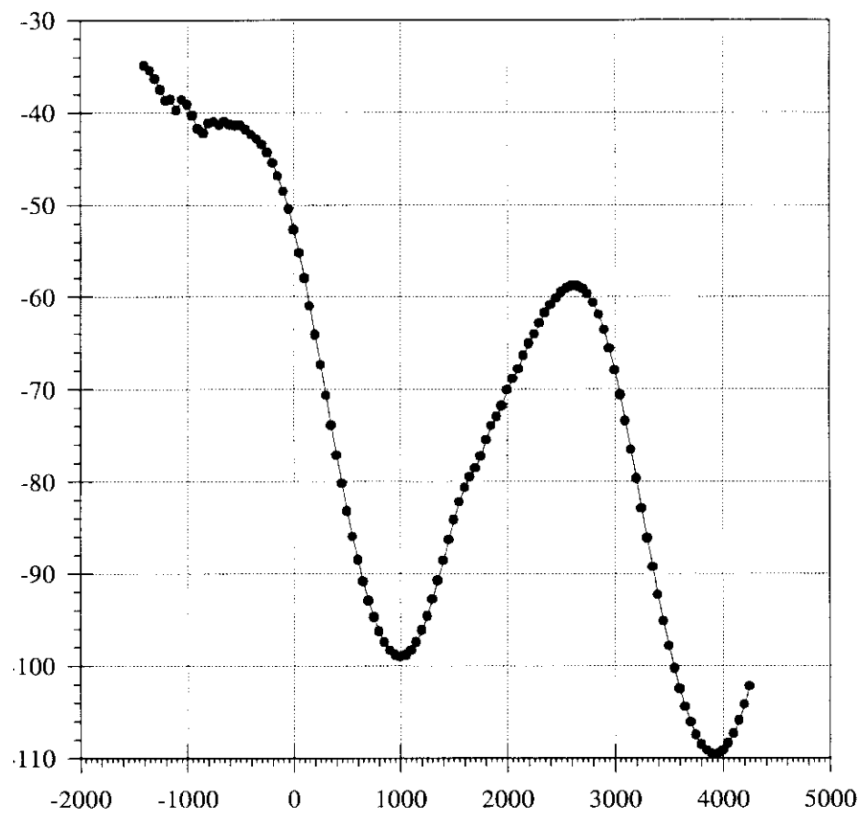


**Figura 4-9: Modelo terreno irregular II**

En las figuras posteriores, se muestra la variación del campo en dB a lo largo del eje  $x$ . También se muestra el obtenido de la Referencia [6] para poder verificar la validez de los resultados. Comparando ambos se puede apreciar que son prácticamente idénticos coincidiendo además coherentemente con la forma del obstáculo presentado.



**Figura 4-10: Terreno irregular II-Campo simulado**



**Figura 4-11: Terreno irregular II- Campo en [6]**

## **5 Conclusiones y trabajo futuro**

---

### **5.1 Conclusiones**

Este TFG tenía como objetivo el desarrollo de diferentes algoritmos para determinar los efectos multipath que pudieran aparecer en diferentes entornos. Partiendo de un enfoque de dos dimensiones, se desarrollaron dos algoritmos basados en Referencia [1], que si bien respondieron correctamente a las verificaciones a las que fueron sometidos, tenían ciertas limitaciones. Estas limitaciones, estaban relacionadas principalmente con la posible aparición de aliasing en los resultados lo que provocó que se restringiera enormemente el posible rango de frecuencias que se podían utilizar. Además de este problema, al obviar una dimensión, se perdía parte de la precisión de los resultados.

Dados los problemas encontrados en los algoritmos desarrollados para la propagación en dos dimensiones, se decidió desarrollar un algoritmo basado en Referencia [4] que tuviera en cuenta las tres dimensiones de propagación de modo que mejorasen las prestaciones que se tenían hasta ese momento. El resultado fue un mayor rango de posibles frecuencias además de una mayor precisión en los resultado y una mayor eficiencia del sistema.

Como conclusión, el desarrollo de este TFG ha sido satisfactorio consiguiéndose en todos los algoritmos de resolución de la ecuación parabólica verificar los resultados correctamente y conseguir corregir los problemas que aparecieron acaecidos durante su realización.

### **5.2 Trabajo futuro**

Durante el desarrollo de este trabajo se ha llegado a la conclusión esperada de que el algoritmo que tiene en cuenta las tres dimensiones es el que mejores resultados da tanto de precisión como de eficiencia. Sin embargo, esto es debido principalmente a que los dos algoritmos desarrollados para la propagación en dos dimensiones tenían algunas deficiencias. Por tanto, estos dos algoritmos tienen todavía margen de mejora pudiéndose además llegar a la precisión obtenida para 3D mediante la aplicación de factores de corrección que tengan en cuenta la falta de una dimensión en la propagación.

Por otro lado, el algoritmo desarrollado para 3D no ha sido probado ante terrenos con mayores irregularidades y que por tanto puedan requerir de una mayor precisión de cálculo por lo que sería recomendable testarlo más profundamente. Además, con el objetivo de

hacer más completo el algoritmo desarrollado se plantea solucionar algunas de sus carencias, como pueden ser la falta de variedad en el tipo de fuentes utilizadas o un mayor número de tipos de representaciones del campo y de la atenuación del mismo .





# Referencias

---

- [1] M.F. Levy, "Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation". Electromagnetic Waves Series. Institution of Electrical Engineers, 2000.
- [2] Jean-Pierre Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves ". Journal of Computational Physics , 1994.
- [3] J.T. Hviid , J.B. Andersen , J. Toftgard and J. Bojer, "Terrain-based propagation model for rural area-an integral equation approach". IEEE Transactions on antennas and propagation, vol. 43, no. 1, January 1995.
- [4] Ramakrishna Janaswamy, "Path loss predictions in the presence of buildings on flat terrain: A 3-D vector parabolic equation approach". IEEE Transactions on antennas and propagation, vol. 51, no. 8, August 2003.
- [5] Merrill Skolnik. "Radar Handbook". Third Edition. McGraw Hill. 2008.
- [6] L., Piazzzi and L. H. Bertoni, "On Screen Placement for Building Representation in Urban Environments Considering 2D multiple Diffraction Problems". IEEE Vehicular Technology Conference, vol. 4, 1999.
- [7] Arnaud Ginestet, Christine Letrou, Gilles Beauquet and Emna-Amira Fnaiech, "Adaptability of Parabolic Wave Equation and Gaussian Beam Shooting methods to Electromagnetic Propagation in Urban Configurations". 2014 International Radar Conference.
- [8] D. M. Pozar, Microwave Engineering, Chapter 2.3 – Microwave Network Analysis, John Wiley & Sons, 2005.
- [9] J. A. Ruiz Cruz, Apuntes de la Asignatura Fundamentos de transmisión y propagación de ondas, , Escuela Politécnica Superior, UAM, Madrid, 2012.
- [10] J. L. Masa Campos, Apuntes de la Asignatura Antenas y compatibilidad electromagnética UAM, Madrid, 2015.

## Glosario

---

2D	Dos dimensiones
3D	Tres dimensiones
Aliasing	Solapamiento
Efecto multipath	Efecto multitrayecto
ILS	Instrumental Landing System
LOS	Line of Sight (Línea de vista)

## **Anexos**

---

### ***A.1 Transformada seno de Fourier***

La transformada seno de Fourier se define en base a Referencia [1] como:

$$U(x, p) = S\{u(x, z)\} = \int_0^{+\infty} u(x, z) \sin(2\pi pz) dz$$